И. В. САВЕЛЬЕВ

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ 5

•

## КВАНТОВАЯ ОПТИКА

•

## АТОМНАЯ ФИЗИКА

•

## ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

•

## ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

•

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Издание пятое, исправленное*




• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2021

ББК 22.3я73
С 12

**Савельев И. В.**

**С 12** Курс общей физики. В 5 тт. Т. 5. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц: Учебное пособие. 5-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 384 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1206-8** (общий)
**ISBN 978-5-8114-1211-2** (том 5)

Пятитомный курс общей физики, созданный И. В. Савельевым на базе лекций, которые он читал в Московском инженерно-физическом институте, знакомит студентов с основными идеями и методами физики.

Пятый том включает материал, посвященный квантовой оптике, атомной физике, физике твердого тела, физике атомного ядра и элементарных частиц.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям.

ББК 22.3я73

**Координатор проекта**
профессор *Н. М. КОЖЕВНИКОВ* (СПбГПУ)

Обложка
*Л. А. АРНДТ*

# Оглавление

Предисловие ........ 6
Методические рекомендации ........ 7

Часть I. **Квантовая оптика**

Глава 1. **Тепловое излучение**
1.1. Тепловое излучение и люминесценция ........ 9
1.2. Закон Кирхгофа ........ 10
1.3. Равновесная плотность энергии излучения ........ 15
1.4. Закон Стефана–Больцмана и закон Вина ........ 18
1.5. Стоячие волны в пространстве трех измерений 19
1.6. Формула Рэлея–Джинса ........ 28
1.7. Формула Планка ........ 30

Глава 2. **Фотоны**
2.1. Тормозное рентгеновское излучение ........ 35
2.2. Фотоэффект ........ 37
2.3. Опыт Боте. Фотоны ........ 42
2.4. Эффект Комптона ........ 47

Часть II. **Атомная физика**

Глава 3. **Боровская теория атома**
3.1. Закономерности в атомных спектрах ........ 51
3.2. Модель атома Томсона ........ 54
3.3. Опыты по рассеянию α-частиц. Ядерная модель атома ........ 55
3.4. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца ........ 61
3.5. Правило квантования круговых орбит ........ 64
3.6. Элементарная боровская теория водородного атома ........ 66

Глава 4. **Элементы квантовой механики**
4.1. Гипотеза де Бройля. Волновые свойства вещества ........ 69
4.2. Необычные свойства микрочастиц ........ 72
4.3. Принцип неопределенности ........ 75
4.4. Уравнение Шрёдингера ........ 80
4.5. Смысл пси-функции ........ 84
4.6. Квантование энергии ........ 85
4.7. Квантование момента импульса ........ 90
4.8. Принцип суперпозиции ........ 94
4.9. Прохождение частиц через потенциальный барьер ........ 95
4.10. Гармонический осциллятор ........ 101

Глава 5. **Физика атомов и молекул**
5.1. Атом водорода ... 103
5.2. Спектры щелочных металлов ... 110
5.3. Ширина спектральных линий ... 114
5.4. Мультиплетность спектров и спин электрона ... 119
5.5. Результирующий механический момент многоэлектронного атома ... 127
5.6. Магнитный момент атома ... 129
5.7. Эффект Зеемана ... 134
5.8. Электронный парамагнитный резонанс ... 140
5.9. Принцип Паули. Распределение электронов по энергетическим уровням атома ... 143
5.10. Периодическая система элементов Менделеева ... 147
5.11. Рентгеновские спектры ... 152
5.12. Энергия молекулы ... 155
5.13. Молекулярные спектры ... 160
5.14. Комбинационное рассеяние света ... 164
5.15. Вынужденное излучение ... 167
5.16. Лазеры ... 170
5.17. Нелинейная оптика ... 175

Часть III. **Физика твердого тела**

Глава 6. **Колебания кристаллической решетки**
6.1. Кристаллическая решетка. Индексы Миллера ... 179
6.2. Теплоемкость кристаллов. Теория Эйнштейна ... 181
6.3. Колебания систем с большим числом степеней свободы ... 183
6.4. Теория Дебая ... 186
6.5. Фононы ... 191
6.6. Эффект Мёссбауэра ... 193

Глава 7. **Статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака**
7.1. Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна ... 200
7.2. Фотонный и фононный газы ... 208
7.3. Сверхтекучесть ... 212

Глава 8. **Электропроводность металлов и полупроводников**
8.1. Квантовая теория свободных электронов в металле. Электронный газ ... 218
8.2. Энергетические зоны в кристаллах ... 224
8.3. Динамика электронов в кристаллической решетке ... 229
8.4. Электропроводность металлов ... 233
8.5. Сверхпроводимость ... 236
8.6. Электропроводность полупроводников ... 242

Глава 9. **Контактные и термоэлектрические явления**
9.1. Работа выхода ... 251
9.2. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы ... 254
9.3. Контактная разность потенциалов ... 259
9.4. Термоэлектрические явления ... 262
9.5. Полупроводниковые диоды и триоды ... 269
9.6. Внутренний фотоэффект ... 275

Часть IV. **Физика атомного ядра и элементарных частиц**

Глава 10. **Атомное ядро**
10.1. Состав и характеристики атомного ядра ... 277
10.2. Масса и энергия связи ядра ... 281
10.3. Модели атомного ядра ... 284
10.4. Ядерные силы ... 286
10.5. Радиоактивность ... 292
10.6. Ядерные реакции ... 301
10.7. Деление ядер ... 307
10.8. Термоядерные реакции ... 314

Глава 11. **Элементарные частицы**
11.1. Виды взаимодействия и классы элементарных частиц ... 318
11.2. Методы регистрации элементарных частиц ... 321
11.3. Космические лучи ... 326
11.4. Частицы и античастицы ... 327
11.5. Изотопический спин ... 336
11.6. Странные частицы ... 339
11.7. Несохранение четности в слабых взаимодействиях ... 343
11.8. Нейтрино ... 346
11.9. Систематика элементарных частиц ... 352
11.10. Кварки ... 356
11.11. Великое объединение ... 362

Предметный указатель ... 364

# Предисловие

Содержанием пятой, завершающей курс, книги является физика XX столетия — квантовая физика, начало которой было положено М. Планком в 1900 г. В книге излагаются четыре раздела втузовской программы: квантовая оптика, атомная физика, физика твердого тела, физика атомного ядра и элементарных частиц.

Четвертое издание книги дополнено главой 7 «Статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака», в которой дан вывод распределения Бозе–Эйнштейна, рассмотрены фотонный, фононный и электронный газы, изложены основные представления о сверхтекучести. Текст предыдущего издания подвергся существенной переработке.

При работе с книгой следует помнить, что физика требует от учащегося обдумывания, размышлений. В усвоении материала основную роль должна играть память логическая, а не формальная. Запоминание должно достигаться через глубокое понимание. Над курсом надо работать, обязательно проделывая все выкладки, не ограничиваясь только чтением книги.

Большую роль в изучении физики играет решение задач. Задачи для самостоятельного решения различной степени трудности можно найти в «Сборнике вопросов и задач по общей физике» И. В. Савельева (5-е изд. — СПб.: Лань, 2007).

Предлагаемый читателю «Курс общей физики» предназначен в первую очередь для втузов с расширенной программой по физике. Однако изложение построено так, что, опустив отдельные места, его можно использовать в качестве учебного пособия для втузов с обычной программой.

В помещенных в начале книги «Методических рекомендациях» указан материал, который можно не рассматривать в случае нехватки времени на изучение курса в полном объеме.

# Методические рекомендации

В настоящих рекомендациях приводится ориентировочный перечень параграфов либо их частей, рассмотрение которых не обязательно в случае нехватки времени на изучение курса в полном объеме. Этот перечень отражает личную точку зрения автора и носит лишь рекомендательный характер.

1. В § 1.3 «Равновесная плотность энергии излучения» можно ограничиться рассмотрением лишь первых трех и последнего абзацев, опустив вывод формулы (1.14). Следует иметь в виду, что формулу (1.15) можно получить весьма просто на основании представления о фотонах (см. текст, связанный с формулами (2.16)–(2.18).

2. Почти весь материал § 1.5 «Стоячие волны в пространстве трех измерений» можно опустить, ограничившись рассмотрением формул (1.48) и (1.49) без вывода.

3. Конец § 1.7 «Формула Планка», начиная со второго из следующих за формулой (1.62) абзацев (в котором содержится интегральное выражение для энергетической светимости абсолютно черного тела), можно не рассматривать.

4. Параграф 3.2 «Модель атома Томсона» можно исключить.

5. В § 3.3 «Опыты по рассеянию $\alpha$-частиц. Ядерная модель атома» можно не рассматривать текст, связанный с фомулами (3.9)–(3.15), и ограничиться сообщением без вывода формулы (3.16), а также изучением следующего за этой формулой текста.

6. В § 3.5 «Правило квантования круговых орбит» можно ограничиться рассмотрением без вывода формулы (3.26).

7. В § 4.9 «Прохождение частиц через потенциальный барьер» можно ограничиться рассмотрением последних абзацев, начиная с формулы (4.56).

8. Параграф 5.3 «Ширина спектральных линий» можно исключить.

9. Конец § 5.4 «Мультиплетность спектров и спин электрона», начиная с формулы (5.36), можно опустить.

10. В § 5.6 «Магнитный момент атома» можно не рассматривать получение формулы (5.45) с помощью векторной модели атома.

11. В § 5.7 «Эффект Зеемана» можно ограничиться рассмотрением простого эффекта Зеемана.

12. Параграф 5.8 «Электронный парамагнитный резонанс» можно исключить.

13. Последние абзацы § 5.10 «Периодическая система элементов Менделеева», относящиеся к правилам Хунда, можно не рассматривать.

14. Параграф 5.12 «Энергия молекулы» можно исключить.

15. Параграф 5.13 «Молекулярные спектры» можно исключить.

16. Параграф 5.14 «Комбинационное рассеяние света» можно исключить.

17. Параграф 6.1 «Кристаллическая решетка Индексы Миллера» можно исключить.

18. Параграф 6.6 «Эффект Мессбауэра» можно исключить.

19. Начало § 7.1 «Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна» можно опустить и начать чтение параграфа с формулы (7.21).

20. При изучении § 8.1 «Квантовая теория свободных электронов в металле. Электронный газ» следует обратить внимание на то, что уровень Ферми, хотя и слабо, но зависит от температуры. В учебниках часто встречается упрощенное определение уровня Ферми как максимальной энергии электронов при абсолютном нуле. Таким образом, отождествляется уровень Ферми вообще с уровнем Ферми при абсолютном нуле (см. текст, следующий за формулой (8.3). В результате уровень Ферми из функции температуры превращается в характерную для данного металла константу. При таком определении становится непонятным возникновение контактной термо-ЭДС Такое определение неприменимо также к полупроводникам, у которых уровень Ферми попадает в запрещенную зону.

21. Начало § 9.4 «Термоэлектрические явления» можно опустить и начать чтение параграфа с формулы (9.12). Конец параграфа, посвященный явлению Томсона, можно исключить.

22. Параграф 10.6 «Ядерные реакции» можно исключить.

23. Параграф 11.5 «Изотопический спин» можно исключить.

24. Параграф 11.7 «Несохранение четности в слабых взаимодействиях» можно исключить.

Подчеркнем еще раз, что приведенный перечень является сугубо ориентировочным. В зависимости от обстоятельств он может быть изменен или расширен по усмотрению преподавателя.

Часть I

# Квантовая оптика

Глава 1

## Тепловое излучение

### 1.1. Тепловое излучение и люминесценция

Излучение телами электромагнитных волн (свечение тел) может осуществляться за счет различных видов энергии. Самым распространенным является тепловое излучение, т. е. испускание электромагнитных волн за счет внутренней энергии тел. Все остальные виды свечения, возбуждаемые за счет любого вида энергии, кроме внутренней (тепловой), объединяются под общим названием «люминесценция».

Окисляющийся на воздухе фосфор светится за счет энергии, выделяемой при химическом превращении. Такой вид свечения называется хемилюминесценцией. Свечение, возникающее в газах и твердых телах под воздействием электрического поля, называется электролюминесценцией. Свечение твердых тел, вызванное бомбардировкой их электронами, называют катодолюминесценцией. Свечение, возбуждаемое поглощаемым телом электромагнитным излучением, называется фотолюминесценцией.

Тепловое излучение имеет место при любой температуре, однако при невысоких температурах излучаются практически лишь длинные (инфракрасные) электромагнитные волны. Окружим излучающее тело оболочкой с идеально отражающей поверхностью (рис. 1.1). Воздух из оболочки удалим. Отраженное оболочкой излучение, упав на тело, поглотится им (частично или полностью). Следовательно, будет происходить непрерывный обмен энергией между телом и заполняющим оболочку излучением. Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны, состояние системы тело — излучение будет равновесным. Опыт показывает, что един-

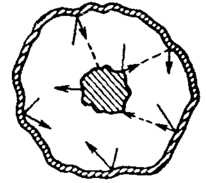


Рис. 1.1

ственным видом излучения, которое может находиться в равновесии с излучающими телами, является тепловое излучение. Все остальные виды излучения оказываются неравновесными.

Способность теплового излучения находиться в равновесии с излучающими телами обусловлена тем, что его интенсивность возрастает при повышении температуры. Допустим, что равновесие между телом и излучением нарушено и тело излучает энергии больше, чем поглощает. Тогда внутренняя энергия тела будет убывать, что приведет к понижению температуры. Это в свою очередь обусловит уменьшение количества излучаемой телом энергии. Температура тела будет понижаться до тех пор, пока количество излучаемой телом энергии не станет равным количеству поглощаемой энергии. Если равновесие нарушится в другую сторону, т. е. количество излучаемой энергии окажется меньше, чем поглощаемой, температура тела будет возрастать до тех пор, пока снова не установится равновесие. Таким образом, нарушение равновесия в системе тело — излучение вызывает возникновение процессов, восстанавливающих равновесие.

Иначе обстоит дело в случае люминесценции. Покажем это на примере хемилюминесценции. Пока протекает обусловливающая излучение химическая реакция, излучающее тело все больше и больше удаляется от первоначального состояния. Поглощение телом излучения не изменит направления реакции, а, наоборот, приведет к более быстрому (вследствие нагревания) протеканию реакции в первоначальном направлении. Равновесие установится лишь тогда, когда будет израсходован весь запас реагирующих веществ и свечение, обусловленное химическими процессами, заменится тепловым излучением.

Итак, из всех видов излучения равновесным может быть только тепловое излучение. К равновесным состояниям и процессам применимы законы термодинамики. Поэтому тепловое излучение должно подчиняться некоторым общим закономерностям, вытекающим из принципов термодинамики. К рассмотрению этих закономерностей мы и перейдем.

## 1.2. Закон Кирхгофа

Интенсивность теплового излучения мы будем характеризовать потоком энергии, измеряемым в ваттах. Поток энергии, испускаемый единицей поверхности излуча-

ющего тела по всем направлениям (в пределах телесного угла $2\pi$), называют энергетической светимостью тела. Мы будем обозначать эту величину буквой $R$. Энергетическая светимость является функцией температуры.

Излучение состоит из волн различных частот $\omega$ (или длин $\lambda$). Обозначим поток энергии, испускаемый единицей поверхности тела в интервале частот $d\omega$, через $dR_\omega$. При малом интервале $d\omega$ поток $dR_\omega$ будет пропорционален $d\omega$:

$$dR_\omega = r_\omega\, d\omega. \tag{1.1}$$

Величина $r_\omega$ называется испускательной способностью тела. Как и энергетическая светимость, испускательная способность сильно зависит от температуры тела. Таким образом, $r_\omega$ есть функция частоты и температуры.

Энергетическая светимость связана с испускательной способностью формулой

$$R_T = \int dR_{\omega T} = \int\limits_0^\infty r_{\omega T}\, d\omega \tag{1.2}$$

(чтобы подчеркнуть, что энергетическая светимость и испускательная способность зависят от температуры, мы снабдили их индексом $T$).

Излучение можно характеризовать вместо частоты $\omega$ длиной волны $\lambda$. Участку спектра $d\omega$ будет соответствовать интервал длин волн $d\lambda$. Определяющие один и тот же участок величины $d\omega$ и $d\lambda$ связаны простым соотношением, вытекающим из формулы $\lambda = 2\pi c/\omega$. Дифференцирование дает

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\, d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}\, d\omega. \tag{1.3}$$

Знак минус в этом выражении не имеет существенного значения, он лишь указывает на то, что с возрастанием одной из величин, $\omega$ или $\lambda$, другая величина убывает. Поэтому минус в дальнейшем мы не будем писать.

Доля энергетической светимости, приходящаяся на интервал $d\lambda$, может быть по аналогии с (1.1) представлена в виде

$$dR_\lambda = r_\lambda\, d\lambda. \tag{1.4}$$

Если интервалы $d\omega$ и $d\lambda$, входящие в выражения (1.1) и (1.4), связаны соотношением (1.3), т. е. относятся к

одному и тому же участку спектра, то величины $dR_\omega$ и $dR_\lambda$ должны совпадать:

$$r_\omega\, d\omega = r_\lambda\, d\lambda.$$

Заменив в последнем равенстве $d\lambda$ согласно (1.3), получим

$$r_\omega\, d\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2}\, d\omega = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c}\, d\omega,$$

откуда

$$r_\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c}. \tag{1.5}$$

С помощью формулы (1.5) можно перейти от $r_\lambda$ к $r_\omega$ и наоборот.

Пусть на элементарную площадку поверхности тела падает поток лучистой энергии $d\Phi_\omega$, обусловленный электромагнитными волнами, частота которых заключена в интервале $d\omega$. Часть этого потока $d\Phi'_\omega$ будет поглощена телом. Безразмерная величина

$$a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega} \tag{1.6}$$

называется **поглощательной способностью** тела. Поглощательная способность тела есть функция частоты и температуры.

По определению $a_{\omega T}$ не может быть больше единицы. Для тела, полностью поглощающего упавшее на него излучение всех частот, $a_{\omega T} \equiv 1$. Такое тело называется **абсолютно черным**. Тело, для которого $a_{\omega T} \equiv a_T = \text{const} < 1$, называют **серым**.

Между испускательной и поглощательной способностями любого тела имеется связь. В этом можно убедиться, рассмотрев следующий эксперимент. Пусть внутри замкнутой оболочки, поддерживаемой при постоянной температуре $T$, помещены несколько тел (рис. 1.2). Полость внутри оболочки эвакуирована, так что тела могут обмениваться энергией между собой и с оболочкой лишь путем испускания и поглощения электромагнитных волн. Опыт показывает, что такая система через некоторое время придет в состояние теплового равновесия — все тела примут одну и ту же температуру, равную температуре оболочки $T$. В таком состоянии тело, обладающее большей испускательной способностью $r_{\omega T}$, теряет в единицу времени с единицы поверхности

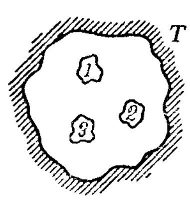


Рис. 1.2

больше энергии, чем тело, обладающее меньшей $r_{\omega T}$. Поскольку температура (а следовательно, и энергия) тел не меняется, то тело, испускающее больше энергии, должно и больше поглощать, т. е. обладать большей $a_{\omega T}$. Таким образом, чем больше испускательная способность тела $r_{\omega T}$, тем больше и его поглощательная способность $a_{\omega T}$. Отсюда вытекает соотношение

$$\left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_2 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right)_3 = \ldots, \tag{1.7}$$

где индексы 1, 2, 3 и т. д. относятся к разным телам.

Соотношение (1.7) выражает установленный Кирхгофом закон, который формулируется следующим образом: *отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же (универсальной) функцией частоты (длины волны) и температуры*:

$$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T). \tag{1.8}$$

Сами величины $r_{\omega T}$ и $a_{\omega T}$ могут меняться чрезвычайно сильно при переходе от одного тела к другому. Отношение же их оказывается одинаковым для всех тел. Это означает, что тело, сильнее поглощающее какие-либо лучи, будет эти лучи сильнее и испускать (не следует смешивать испускание лучей с их отражением).

Для абсолютно черного тела по определению $a_{\omega T} \equiv 1$. Следовательно, из формулы (1.8) вытекает, что $r_{\omega T}$ для такого тела равно $f(\omega, T)$. Таким образом, универсальная функция Кирхгофа $f(\omega, T)$ есть не что иное, как испускательная способность абсолютно черного тела.

При теоретических исследованиях для характеристики спектрального состава равновесного теплового излучения удобнее пользоваться функцией частоты $f(\omega, T)$. В экспериментальных работах удобнее пользоваться функцией длины волны $\varphi(\lambda, T)$. Обе функции связаны друг с другом формулой

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2}\varphi(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\varphi(\lambda, T), \tag{1.9}$$

аналогичной формуле (1.5). Согласно (1.9), для того чтобы по известной функции $f(\omega, T)$ найти $\varphi(\lambda, T)$, нужно заме-

нить в $f(\omega, T)$ частоту $\omega$ на $2\pi c/\lambda$ и получившееся выражение умножить на $2\pi c/\lambda^2$:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right). \tag{1.10}$$

Для нахождения $f(\omega, T)$ по известной $\varphi(\lambda, T)$ нужно воспользоваться соотношением

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \varphi\left(\frac{2\pi c}{\omega}, T\right). \tag{1.11}$$

Абсолютно черных тел в природе не существует. Сажа и платиновая чернь имеют поглощательную способность $a_{\omega T}$, близкую к единице, лишь в ограниченном интервале частот; в далекой инфракрасной области их поглощательная способность заметно меньше единицы. Однако можно создать устройство, сколь угодно близкое по своим свойствам к абсолютно черному телу. Такое устройство представляет собой почти замкнутую полость, снабженную малым отверстием (рис. 1.3). Излучение, проникшее внутрь через отверстие, прежде чем выйти обратно из отверстия, претерпевает многократные отражения. При каждом отражении часть энергии поглощается, в результате чего практически все излучение любой частоты поглощается такой полостью[1]). Согласно закону Кирхгофа испускательная способность такого устройства очень близка к $f(\omega, T)$, причем $T$ означает температуру стенок полости. Таким образом, если стенки полости поддерживать при некоторой температуре $T$, то из отверстия выходит излучение, весьма близкое по спектральному составу к излучению абсолютно черного тела при той же температуре. Разлагая это излучение в спектр с помощью дифракционной решетки и измеряя интенсивность различных участков спектра, можно найти экспериментально вид функции $f(\omega, T)$ или $\varphi(\lambda, T)$. Результаты таких опытов приведены на рис. 1.4. Разные кривые относятся к различным значениям температуры $T$ абсолютно черного тела. Площадь, охватываемая кривой, дает энергетическую светимость абсолютно черного тела при соответствующей температуре.

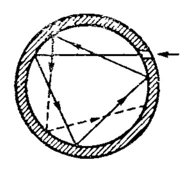


Рис. 1.3

[1]) По той же причине внутренность комнаты в яркий солнечный день при рассматривании издали через открытое окно кажется темной.

Из рис. 1.4 следует, что энергетическая светимость абсолютно черного тела сильно возрастает с температу-

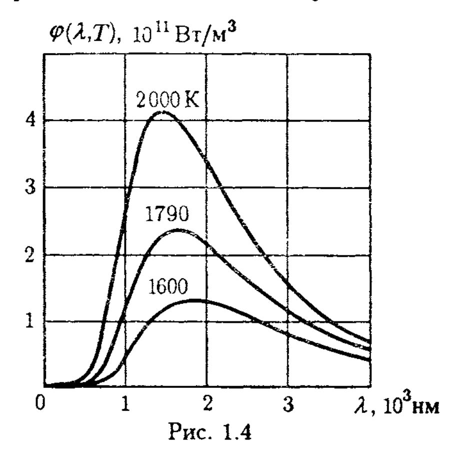



Рис. 1.4

рой. Максимум испускательной способности с увеличением температуры сдвигается в сторону более коротких волн.

## 1.3. Равновесная плотность энергии излучения

Рассмотрим излучение, находящееся в равновесии с веществом. Для этого представим себе эвакуированную полость, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре $T$. В равновесном состоянии энергия излучения будет распределена в объеме полости с определенной плотностью $u = u(T)$. Спектральное распределение этой энергии можно охарактеризовать функцией $u(\omega, T)$, определяемой условием $du_\omega = u(\omega, T)\,d\omega$, где $du_\omega$ — доля плотности энергии, приходящаяся на интервал частот $d\omega$. Полная плотность энергии $u(T)$ связана с функцией $u(\omega, T)$ формулой

$$u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T)\,d\omega. \tag{1.12}$$

Из термодинамических соображений следует, что равновесная плотность энергии излучения $u(T)$ зависит только от температуры и не зависит от свойств стенок полости. Рассмотрим две полости, стенки которых изготовлены из

разных материалов и имеют первоначально одинаковую температуру. Допустим, что равновесная плотность энергии в обеих полостях различна и, скажем, $u_1(T) > u_2(T)$. Соединим полости с помощью небольшого отверстия (рис. 1.5) и тем самым позволим стенкам полостей вступить в теплообмен через излучение. Так как по предположению $u_1 > u_2$, поток энергии из первой полости во вторую должен быть больше, чем поток, текущий во встречном направлении. В результате стенки второй полости станут поглощать больше энергии, чем излучать, и температура их начнет повышаться. Стенки же первой полости станут поглощать меньше энергии, чем излучать, так что они будут охлаждаться. Однако два тела с первоначально одинаковой температурой не могут вследствие теплообмена друг с другом приобрести различные температуры — это запрещено вторым началом термодинамики. Поэтому наше допущение о неодинаковости $u_1$ и $u_2$ должно быть признано неправомерным. Вывод о равенстве $u_1(T)$ и $u_2(T)$ распространяется на каждую спектральную составляющую $u(\omega, T)$.

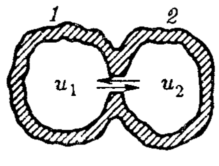


Рис. 1.5

Независимость равновесного излучения от природы стенок полости можно пояснить следующими соображениями. Абсолютно черные стенки поглощали бы всю упавшую на них энергию $\Phi_э$ и испускали бы такой же поток энергии $\Phi_э$. Стенки с поглощательной способностью $a$ поглотят долю $a\Phi_э$ упавшего на них потока $\Phi_э$ и отразят поток, равный $(1 - a)\Phi_э$. Кроме того, они излучат поток $a\Phi_э$ (равный поглощенному потоку). В итоге стенки полости вернут излучению такой же поток энергии $\Phi_э = (1 - a)\Phi_э + a\Phi_э$, какой возвращали бы излучению абсолютно черные стенки.

Равновесная плотность энергии излучения связана с энергетической светимостью абсолютно черного тела $R^*$ простым соотношением, которое мы сейчас выведем [2]).

Рассмотрим эвакуированную полость с абсолютно черными стенками. В случае равновесия через каждую точку внутри полости будет проходить в любом направлении поток излучения одинаковой плотности. Если бы излучение распространялось в одном заданном направлении (т. е.

[2]) Чтобы подчеркнуть, что речь идет об энергетической светимости абсолютно черного тела, мы снабдили $R$ звездочкой.

через данную точку проходил только один луч), плотность потока энергии в рассматриваемой точке была бы равна произведению плотности энергии $u$ на скорость электромагнитной волны $c$. Однако через каждую точку проходит множество лучей, направления которых равномерно распределены в пределах телесного угла $4\pi$. Поток энергии $cu$ также распределен равномерно в пределах этого телесного угла. Следовательно, в каждой точке в пределах телесного угла $d\Omega$ будет течь поток энергии, плотность которого равна

$$dj = \frac{cu}{4\pi} d\Omega.$$

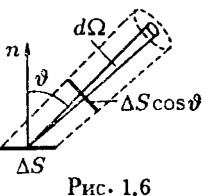


Рис. 1.6

Возьмем на поверхности полости элементарную площадку $\Delta S$ (рис. 1.6). Эта площадка посылает в пределах телесного угла $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ в направлении, образующем с нормалью угол $\vartheta$, поток энергии

$$d\Phi_э = dj \, \Delta S \cos\vartheta = \frac{cu}{4\pi} d\Omega \, \Delta S \cos\vartheta = \frac{cu}{4\pi} \Delta S \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

По всем направлениям, заключенным в пределах телесного угла $2\pi$, площадка $\Delta S$ посылает поток энергии

$$\Delta\Phi_э = \int d\Phi_э = \frac{cu}{4\pi} \Delta S \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{c}{4} u \, \Delta S. \tag{1.13}$$

Вместе с тем поток энергии, испускаемый площадкой $\Delta S$, можно найти, умножив энергетическую светимость $R^*$ на $\Delta S$: $\Delta\Phi_э = R^* \Delta S$. Сравнение этого выражения с (1.13) дает

$$R^* = \frac{c}{4} u. \tag{1.14}$$

Равенство (1.14) должно выполняться для каждой спектральной составляющей излучения. Отсюда вытекает, что

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T). \tag{1.15}$$

Эта формула связывает испускательную способность абсолютно черного тела с равновесной плотностью энергии теплового излучения.

## 1.4. Закон Стефана–Больцмана и закон Вина

Теоретическое объяснение законов излучения абсолютно черного тела имело огромное значение в истории физики — оно привело к понятию квантов энергии.

Долгое время попытки получить теоретически вид функции $f(\omega,T)$ [3]) не давали общего решения задачи. Стефан [4]) (1879), анализируя экспериментальные данные, пришел к выводу, что энергетическая светимость $R$ любого тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Однако последующие более точные измерения показали ошибочность его выводов. Больцман (1884), исходя из термодинамических соображений, получил теоретически для энергетической светимости абсолютно черного тела следующее значение:

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega,T)\,d\omega = \sigma T^4, \tag{1.16}$$

где $\sigma$ — постоянная величина, $T$ — термодинамическая температура. Таким образом заключение, к которому Стефан пришел для нечерных тел (с абсолютно черными телами он не экспериментировал), оказалось справедливым лишь для абсолютно черных тел.

Соотношение между энергетической светимостью абсолютно черного тела и его термодинамической температурой (1.16) получило название закона Стефана–Больцмана. Константу $\sigma$ называют постоянной Стефана–Больцмана. Ее экспериментальное значение равно

$$\sigma = 5,7\cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К}^4). \tag{1.17}$$

Вин [5]) (1893), воспользовавшись, кроме термодинамики, электромагнитной теорией, показал, что функция спектрального распределения должна иметь вид

$$f(\omega,T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \tag{1.18}$$

где $F$ — некоторая функция отношения частоты к температуре.

---

[3]) Или, что то же самое, функции $u(\omega,T)$ (см. формулу (1.15)).

[4]) Йозеф Стефан (1835–1893) — австрийский физик.

[5]) Вильгельм Вин (1864–1928) — немецкий физик.

Согласно формуле (1.10) для функции $\varphi(\lambda, T)$ получается выражение

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5}\psi(\lambda T), \qquad (1.19)$$

где $\psi(\lambda T)$ — некоторая функция произведения $\lambda T$.

Соотношение (1.19) позволяет установить зависимость между длиной волны $\lambda_m$, на которую приходится максимум функции $\varphi(\lambda, T)$, и температурой. Продифференцируем это соотношение по $\lambda$:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^5}T\psi'(\lambda T) - \frac{5}{\lambda^6}\psi(\lambda T) = \frac{1}{\lambda^6}[\lambda T\psi'(\lambda T) - 5\psi(\lambda T)]. \qquad (1.20)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой некоторую функцию $\Psi(\lambda T)$. При длине волны $\lambda_m$, соответствующей максимуму функции $\varphi(\lambda, T)$, выражение (1.20) должно обращаться в нуль:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_m^6}\Psi(\lambda_m T) = 0.$$

Из опыта известно, что $\lambda_m$ конечно ($\lambda_m \neq \infty$). Поэтому должно выполняться условие $\Psi(\lambda_m T) = 0$. Решение последнего уравнения относительно неизвестного $\lambda_m T$ дает для этого неизвестного некоторое число, которое мы обозначим буквой $b$. Таким образом, получается соотношение

$$T\lambda_m = b, \qquad (1.21)$$

которое носит название закона смещения Вина. Экспериментальное значение константы $b$ равно

$$b = 2,90 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К} = 2,90 \cdot 10^7\ \text{Å} \cdot \text{К}. \qquad (1.22)$$

## 1.5. Стоячие волны в пространстве трех измерений

При нахождении функции $f(\omega, T)$, а также при вычислении теплоемкости твердых тел (см. § 6.4) возникает необходимость в подсчете числа стоячих волн, которые могут возбуждаться в объеме конечных размеров. В данном параграфе мы рассматриваем этот вопрос.

Пусть вдоль оси $x$ бегут во встречных направлениях две плоские волны, возникающие в результате отражения от стенок, расположенных в точках $x = 0$ и $x = a$ (рис. 1.7). Уравнения волн имеют вид

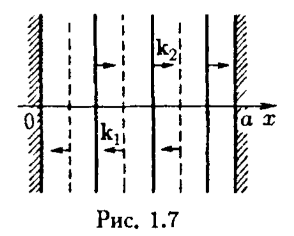


Рис. 1.7

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \alpha) \qquad (1.23)$$

(за счет выбора начала отсчета времени начальная фаза первой волны сделана равной нулю). Мы знаем, что в этом случае в области $0 \le x \le a$ возникает стоячая волна, причем в зависимости от реальных условий на границах области бывают либо узлы, либо пучности. Так, например, на концах струны наблюдаются узлы, а на концах закрепленного в середине стержня — пучности.

Из уравнений (1.23) видно, что для того чтобы на границе $x = 0$ возникала пучность, фаза $\alpha$ должна быть равна нулю (тогда в точках с $x = 0$ колебания будут происходить в одинаковой фазе). В этом случае при отражении от границы фаза волны не изменяется. Это следует из того, что в непосредственной близости к стенке (при $x \approx 0$) фазы колебаний $\xi_1$ и $\xi_2$ совпадают. Для того же чтобы на границе $x = 0$ возникал узел, фаза $\alpha$ должна быть равна $\pi$ (тогда в точках с $x \approx 0$ колебания $\xi_1$ и $\xi_2$ будут происходить в противофазе). В этом случае при отражении от границы фаза волны претерпевает скачок на $\pi$.

Итак, в случае, когда на границах области наблюдаются пучности, уравнения (1.23) имеют вид

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

В случае, когда на границах области наблюдаются узлы, уравнения (1.23) выглядят следующим образом:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \pi).$$

Сложение колебаний $\xi_1$ и $\xi_2$ в случае пучностей на границах приводит к уравнению

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) \qquad (1.24)$$

и в случае узлов на границах — к уравнению

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(kx + \pi/2)\cos(\omega t + \pi/2). \qquad (1.25)$$

Легко убедиться в том, что при $x = 0$ амплитуда максимальна в первом случае и равна нулю — во втором.

Для того чтобы и на другой границе (т. е. при $x = a$) наблюдалась пучность (в случае, описываемом уравнением (1.24)) либо узел (в случае, описываемом уравнением (1.25)), необходимо, чтобы произведение $ka$ было целым кратным $\pi$: $ka = n\pi$. Таким образом, независимо от того, что наблюдается на границах области (пучности или узлы), модуль волнового вектора должен иметь значения

$$k = \frac{\pi}{a}n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.26}$$

Пусть $k' = (\pi/a)n'$, $k'' = (\pi/a)n''$. Разность $n'' - n'$ дает число стоячих волн $\Delta N_k$, модули волновых векторов которых лежат в интервале $\Delta k = k'' - k'$. Приняв во внимание значения $k'$ и $k''$, получим, что

$$\Delta N_k = \frac{a}{\pi}\Delta k. \tag{1.27}$$

Значения $N_k$ образуют дискретную последовательность. Заменив эту последовательность непрерывной функцией, можно написать

$$dN_k = \frac{a}{\pi}\,dk. \tag{1.28}$$

Модуль волнового вектора связан с частотой $\omega$ и скоростью $v$ соотношением

$$k = \frac{\omega}{v}. \tag{1.29}$$

Соответственно

$$dk = \frac{d\omega}{v} \tag{1.30}$$

(мы считаем, что дисперсии нет, т. е. $v = \mathrm{const}$). Заменив в (1.28) $dk$ на $d\omega/v$, придем к формуле

$$dN_\omega = \frac{a}{\pi v}\,d\omega, \tag{1.31}$$

где $dN_\omega$ — число стоячих волн, частоты которых лежат в интервале от $\omega$ до $\omega + d\omega$.

Теперь обратимся к двумерному случаю. Пусть в пределах прямоугольной области со сторонами $a$ и $b$ возбуждена плоская волна (1), бегущая в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1$ (рис. 1.8 *а*). В результате отражения от правой границы области возникнет бегущая волна (2) с волновым

вектором $\mathbf{k}_2$. Отражение волны (2) от верхней границы (рис. 1.8 *б*) приведет к возникновению волны (3) с волновым вектором $\mathbf{k}_3$. Наконец, отражение волны (3) от левой границы (рис. 1.8 *в*) приведет к возникновению волны (4) с волновым вектором $\mathbf{k}_4$. Никаких больше волн не возникнет. В самом деле, отражение волны (1) от верхней границы даст волну (4), отражение волны (2) от левой границы даст волну (1), отражение волны (3) от нижней границы даст волну (2), и, наконец, отражение волны (4) от нижней и правой границ области даст соответственно волны (1) и (3).

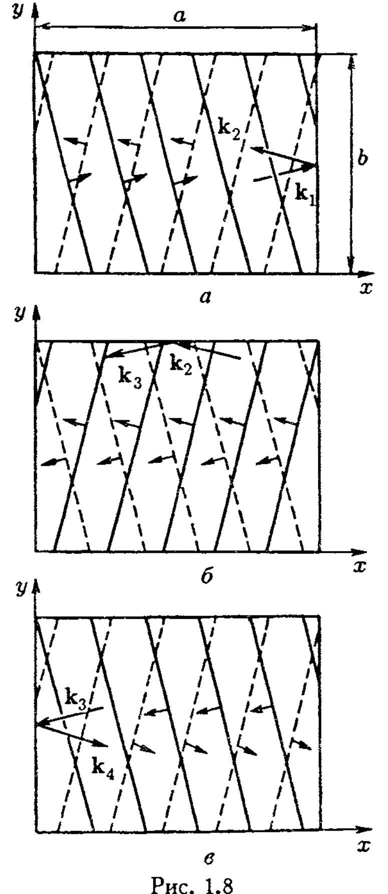


Рис. 1.8

Итак, рассматриваемая двумерная область будет заполнена четырьмя плоскими волнами, бегущими в направлениях волновых векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_4$. Если проекция вектора $\mathbf{k}_1$ на оси $x$ и $y$ (см. рис. 1.8) обозначить через $k_x$ и $k_y$, то проекции всех четырех векторов будут равны (номер вектора указан в скобках):

$$\begin{array}{ll} (1) & k_x,\ k_y; \\ (2) & -k_x,\ k_y; \\ (3) & -k_x,\ -k_y; \\ (4) & k_x,\ -k_y. \end{array}$$

Выше мы выяснили, что пучности на границах получаются, если при отражении от стенки фаза волны не изменяется. В этом случае уравнения бегущих волн имеют вид

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - k_x x - k_y y), \quad \xi_3 = A\cos(\omega t + k_x x + k_y y),$$
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + k_x x - k_y y), \quad \xi_4 = A\cos(\omega t - k_x x + k_y y).$$

Сложив попарно эти уравнения, получим

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(k_x x)\cos(\omega t - k_y y),$$
$$\xi_3 + \xi_4 = 2A\cos(k_x x)\cos(\omega t + k_y y).$$

Сумма найденных выражений дает уравнение, описывающее двумерную стоячую волну, получающуюся в том случае, когда отражение от границы происходит без скачка фазы бегущей волны:

$$\xi = \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 = 4A\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(\omega t). \quad (1.32)$$

Из уравнения (1.32) следует, что в точке (0, 0) амплитуда максимальна. Для того чтобы она была максимальна также и в точках $(0, b)$, $(a, 0)$ и $(a, b)$ (т. е. в остальных трех вершинах прямоугольника), необходимо выполнение условий

$$k_x a = n_1\pi, \quad k_y b = n_2\pi \quad (n_1, n_2 = 1, 2, \ldots). \quad (1.33)$$

Отметим, что из-за присутствия в формуле (1.32) множителя $\cos(k_y y)$ амплитуда достигает максимального значения не по всей длине сторон $x = 0$ и $x = a$, а лишь на концах этих сторон (где $y = 0$ и $y = b$), а также в $n_2 - 1$ промежуточных точках (в этих точках $k_y y$ принимает значения $\pi$, $2\pi$, ..., $(n_2 - 1)\pi$). В промежутках между этими точками амплитуда изменяется по закону косинуса. Аналогично амплитуда достигает максимума не по всей длине сторон $y = 0$ и $y = b$, лишь на концах этих сторон, а также в $n_1 - 1$ промежуточных точках.

Узлы на границах получаются, если при отражении от стенки фаза волны претерпевает скачок на $\pi$. Каждую из волн (2), (3), (4) можно рассматривать как результат отражения от стенки предыдущей волны (см. рис. 1.8). Соответственно уравнения волн нужно писать в виде

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - k_x x - k_y y),\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + k_x x - k_y y + \pi),\\ \xi_3 &= A\cos(\omega t + k_x x + k_y y + 2\pi),\\ \xi_4 &= A\cos(\omega t - k_x x + k_y y + 3\pi).\end{aligned} \quad (1.34)$$

Фаза колебания допускает прибавление к ней или вычитание из нее целого числа $2\pi$. На этом основании видоизменим уравнения (1.34) следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - k_x x - k_y y),\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + k_x x - k_y y + \pi),\\ \xi_3 &= A\cos(\omega t + k_x x + k_y y),\\ \xi_4 &= A\cos(\omega t - k_x x + k_y y + \pi).\end{aligned}$$

Сложив попарно эти уравнения, получим

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(k_x x + \pi/2)\cos(\omega t - k_y y + \pi/2), \quad (1.35)$$

$$\xi_3 + \xi_4 = 2A\cos(k_x x - \pi/2)\cos(\omega t + k_y y + \pi/2). \quad (1.36)$$

Изменим в выражении (1.36) знаки обоих косинусов на обратные, добавив к аргументу первого косинуса и вычтя из аргумента второго косинуса $\pi$ (при этом значение выражения останется прежним). В результате сумма $\xi_3 + \xi_4$ примет вид

$$\xi_3 + \xi_4 = 2A\cos(k_x x + \pi/2)\cos(\omega t + k_y y - \pi/2).$$

Сложив эту сумму с выражением (1.35), получим уравнение стоячей волны, наблюдающейся в том случае, когда при отражении от границы фаза бегущей волны претерпевает скачок на $\pi$:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \\ = 4A\cos(k_x x + \pi/2)\cos(k_y y - \pi/2)\cos(\omega t). \quad (1.37)$$

Отметим, что добавляя (или вычитая) $\pi$ к аргументам двух из трех сомножителей, уравнению стоячей волны можно придать вид

$$\xi = 4A\cos(k_x x - \pi/2)\cos(k_y y + \pi/2)\cos(\omega t)$$

или

$$\xi = 4A\cos(k_x x + \pi/2)\cos(k_y y + \pi/2)\cos(\omega t + \pi).$$

Из уравнения (1.37) следует, что во всех точках границы $x = 0$ и границы $y = 0$ амплитуда равна нулю. Для того чтобы она была равна нулю также и в точках границ $x = a$ и $y = b$, необходимо выполнение условий (1.33).

Таким образом, независимо от того, что получается на границах области (пучности в углах и некоторых промежуточных точках или по всей границе узлы), проекции волнового вектора должны иметь значения (ср. с (1.26))

$$k_x = \frac{\pi}{a}n_1, \quad k_y = \frac{\pi}{b}n_2 \quad (n_1, n_2 = 1, 2, \ldots). \quad (1.38)$$

Отметим, что модуль волнового вектора всех четырех бегущих волн, наложение которых приводит к возникновению стоячей волны, одинаков и равен

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (1.39)$$

Величину (1.39) мы будем называть модулем волнового вектора стоячей волны.

Возьмем на $k$-плоскости систему координат с осями $k_x$ и $k_y$ (рис. 1.9). Волновым векторам, отвечающим четырем бегущим волнам, образующим данную стоячую волну, соответствуют на $k$-плоскости четыре симметричные точки, указанные на рисунке. Все эти точки отвечают одной и той же стоячей волне. Поэтому при подсчете по точкам числа стоячих волн нужно принимать во внимание только точки, расположенные в одном из квадрантов $k$-плоскости.

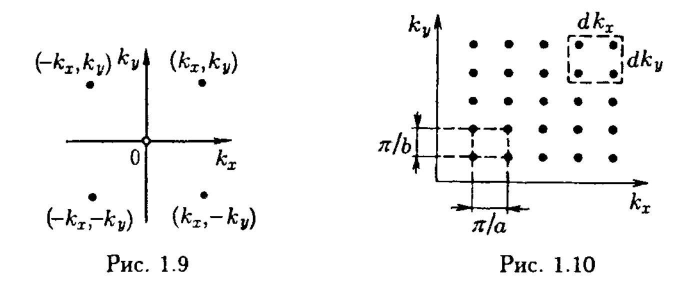



Рис. 1.9 Рис. 1.10

Естественно рассматривать точки, расположенные в первом квадранте.

Согласно формуле (1.38) точки, соответствующие всевозможным стоячим волнам, располагаются в вершинах прямоугольников со сторонами $\pi/a$ и $\pi/b$ (рис. 1.10). Легко сообразить, что на долю каждой стоячей волны приходится на $k$-плоскости площадь, равная $\pi^2/(ab) = \pi^2/S$ ($S$ — площадь двумерной области, в пределах которой устанавливается стоячая волна). Следовательно, плотность точек на $k$-плоскости равна $S/\pi^2$.

Найдем число стоячих волн $dN_{k_x,k_y}$, у которых проекции волновых векторов заключены в пределах от $k_x$ до $k_x + dk_x$ и от $k_y$ до $k_y + dk_y$. Это число равно плотности точек, умноженной на площадь $dk_x dk_y$:

$$dN_{k_x,k_y} = \frac{S}{\pi^2}\, dk_x\, dk_y. \tag{1.40}$$

Теперь определим число стоячих волн $dN_k$, у которых модуль волнового вектора лежит в пределах от $k$ до $k + dk$. Это число равно количеству точек, попадающих в область, заключенную между четвертьокружностями радиусов $k$ и

$k + dk$ (рис. 1.11). Площадь этой области равна $\pi k\,dk/2$. Умножив плотность точек на площадь области, получим

$$dN_k = \frac{S}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2}\pi k\,dk = \frac{S}{2\pi} k\,dk. \qquad (1.41)$$

Приняв во внимание формулы (1.29) и (1.30), можно написать, что

$$dN_\omega = \frac{S}{2\pi v^2}\omega\,d\omega, \qquad (1.42)$$

где $dN_\omega$ — число стоячих волн, частоты которых лежат в пределах от $\omega$ до $\omega + d\omega$ (ср. с (1.31)).

Полученные результаты легко обобщить на трехмерный случай. Стоячая волна, возникающая в пределах прямоугольной области с параллельными координатным

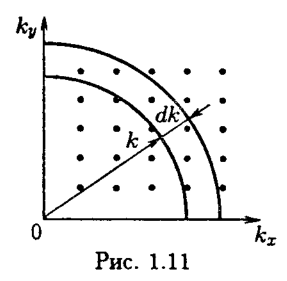


Рис. 1.11

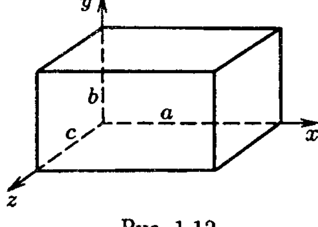


Рис. 1.12

осям сторонами $a$, $b$ и $c$ (рис. 1.12), образуется наложением восьми бегущих волн, проекции волновых векторов которых равны

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $k_x$, | $k_y$, | $k_z$; | (5) | $k_x$, | $-k_y$, | $-k_z$; |
| (2) | $-k_x$, | $k_y$, | $k_z$; | (6) | $-k_x$, | $-k_y$, | $-k_z$; |
| (3) | $-k_x$, | $-k_y$, | $k_z$; | (7) | $-k_x$, | $k_y$, | $-k_z$; |
| (4) | $k_x$, | $-k_y$, | $k_z$; | (8) | $k_x$, | $k_y$, | $-k_z$. |

Рекомендуем написать уравнения этих волн и, произведя вычисления, убедиться в том, что уравнение стоячей волны имеет вид

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_8 = 8A\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t) \qquad (1.43)$$

в случае, когда отражение волны от стенок полости происходит без изменения фазы, и

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_8 = 8A\cos\left(k_x x + \frac{\pi}{2}\right) \times$$
$$\times \cos\left(k_y y - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k_z z + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.44)$$

в случае, когда при отражении фаза волны претерпевает скачок на $\pi$ [6]) (ср. с (1.32) и (1.37)).

Отметим, что в выражении (1.44) можно изменять на обратный знак при $\pi/2$ одновременно в двух любых множителях, не изменяя при этом значения $\xi$.

Из уравнений (1.43) и (1.44) следует, что для того чтобы амплитуда стоячей волны имела одинаковое значение во всех восьми вершинах области, в которой возбуждена стоячая волна, необходимо выполнение условий

$$k_x = \frac{\pi}{a}n_1,\ k_y = \frac{\pi}{b}n_2,\ k_z = \frac{\pi}{c}n_3 \quad (n_1, n_2, n_3 = 1, 2, \ldots) \tag{1.45}$$

(ср. с (1.38)).

Согласно уравнению (1.44) амплитуда равна нулю всюду на границе области. В случае же, описываемом уравнением (1.43), максимальная амплитуда получается в вершинах области, а также в отдельных точках на ограничивающих область плоскостях. В $k$-пространстве с осями $k_x$, $k_y$, $k_z$ каждой стоячей волне отвечает точка в первом октанте (рис. 1.13). На долю каждой точки приходится объем $\pi^3/(abc) = \pi^3/V$ ($V$ — объем области). Следовательно, плотность точек равна $V/\pi^3$.

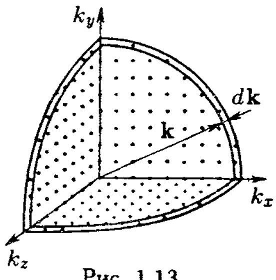


Рис. 1.13

Число стоячих волн, у которых проекции волновых векторов заключены в пределах от $k_x$ до $k_x + dk_x$, от $k_y$ до $k_y + dk_y$ и от $k_z$ до $k_z + dk_z$, определяется выражением (ср. с (1.40))

$$dN_{k_x,k_y,k_z} = \frac{V}{\pi^3}\,dk_x\,dk_y\,dk_z. \tag{1.46}$$

Число стоячих волн, у которых модуль волнового вектора лежит в пределах от $k$ до $k + dk$, равно количеству точек, попадающих в пределы 1/8 шарового слоя радиуса $k$ и толщины $dk$ (см. рис. 1.13). Следовательно (ср. с (1.41)),

$$dN_k = \frac{V}{\pi^3}\cdot\frac{1}{8}4\pi k^2\,dk = V\frac{k^2\,dk}{2\pi^2}. \tag{1.47}$$

[6]) В этом случае начальную фазу волн с нечетными номерами можно взять равной нулю, а фазу волн с четными номерами положить равной $\pi$.

Приняв во внимание формулы (1.29) и (1.30), получим число стоячих волн, частоты которых попадают в интервал от $\omega$ до $\omega + d\omega$:

$$dN_\omega = V\frac{\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 v^3}. \tag{1.48}$$

Выражение (1.48) пропорционально объему полости $V$. Поэтому можно говорить о числе стоячих волн $dn_\omega$, приходящихся на единицу объема полости. Это число равно

$$dn_\omega = \frac{\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 v^3}. \tag{1.49}$$

В дальнейшем мы внесем в это выражение уточнение, вызванное необходимостью учесть возможные виды поляризации волн.

## 1.6. Формула Рэлея–Джинса

Рэлей и Джинс[7]) сделали попытку определить равновесную плотность излучения $u(\omega, T)$, исходя из теоремы классической статистики о равнораспределении энергии по степеням свободы. Они предположили, что на каждое электромагнитное колебание приходится в среднем энергия, равная двум половинкам $kT$ — одна половинка на электрическую, другая — на магнитную энергию волны (напомним, что по классическим представлениям на каждую колебательную степень свободы приходится в среднем энергия, равная двум половинкам $kT$).

Равновесное излучение в полости представляет собой систему стоячих волн. Без учета возможных видов поляризации количество стоячих волн, отнесенное к единице объема полости, определяется формулой (1.49), в которой скорость $v$ нужно положить равной $c$. Вдоль заданного направления могут распространяться две электромагнитные волны одинаковой частоты, различающиеся направлением поляризации (поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях). Чтобы учесть это обстоятельство, нужно выражение (1.49) умножить на два. В результате получим

$$dn_\omega = \frac{\omega^2\,d\omega}{\pi^2 c^3}. \tag{1.50}$$

---

[7]) Джеймс Хопвуд Джинс (1877–1946) — английский физик и астрофизик.

Как мы уже отмечали, Рэлей и Джинс, исходя из закона равнораспределения энергии по степеням свободы, приписали каждому колебанию энергию $\langle\varepsilon\rangle$, равную $kT$. Умножив (1.50) на $\langle\varepsilon\rangle$, получим плотность энергии, приходящуюся на интервал частот $d\omega$:

$$u(\omega, T)\, d\omega = \langle\varepsilon\rangle\, dn_\omega = kT\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\, d\omega.$$

Отсюда

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT. \tag{1.51}$$

Перейдя от $u(\omega, T)$ к $f(\omega, T)$ по формуле (1.15), получим выражение для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}kT. \tag{1.52}$$

Отметим, что функция (1.52) удовлетворяет полученному Вином условию (1.18).

Выражения (1.51) и (1.52) называются **формулой Рэлея-Джинса**. Эта формула удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными лишь при больших длинах волн и резко расходится с опытом для малых

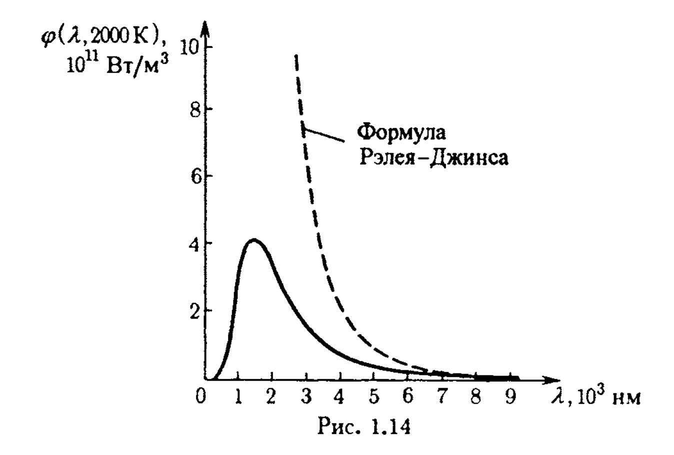



Рис. 1.14

длин волн (на рис. 1.14 сплошной линией изображена экспериментальная кривая, штриховой линией — кривая, построенная по формуле Рэлея-Джинса).

Интегрирование выражения (1.51) по $\omega$ в пределах от 0 до $\infty$ дает для равновесной плотности энергии $u(T)$ бесконечно большое значение. Этот результат, получивший название ультрафиолетовой катастрофы, также находится в противоречии с опытом. Равновесие между излучением и излучающим телом устанавливается при конечных значениях $u(T)$.

## 1.7. Формула Планка

С классической точки зрения вывод формулы Рэлея–Джинса является безупречным. Поэтому расхождение этой формулы с опытом указывало на существование каких-то закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики.

В 1900 г. Планку удалось найти вид функции $u(\omega, T)$, в точности соответствующий опытным данным. Для этого ему пришлось сделать предположение, совершенно чуждое классическим представлениям, а именно допустить, что электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии (квантов), величина которых пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon = \hbar\omega. \tag{1.53}$$

Коэффициент пропорциональности $\hbar$ получил впоследствии название постоянной Планка[8]). Определенное из опыта[9]) значение $\hbar$ равно

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} = \\ = 1,055 \cdot 10^{-27}\ \text{эрг} \cdot c = 0,659 \cdot 10^{-15}\ \text{эВ} \cdot \text{с}. \tag{1.54}$$

В механике есть имеющая размерность «энергия×время» величина, которая называется действием. Поэтому постоянную Планка иногда называют квантом действия. Заметим, что размерность $\hbar$ совпадает с размерностью момента импульса.

---

[8]) Собственно говоря, постоянной Планка $h$ называют коэффициент пропорциональности между $\varepsilon$ и частотой: $\varepsilon = h\nu$. Постоянная $\hbar$ ($h$ перечеркнутое) есть постоянная Планка $h$, деленная на $2\pi$. Числовое значение постоянной Планка равно $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с$=$ $= 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·с.

[9]) Постоянная Планка входит во многие физические соотношения, в связи с чем может быть определена различными способами Наиболее точное значение получается из измерений коротковолновой границы тормозного рентгеновского спектра (см. § 2.1).

Если излучение испускается порциями $\hbar\omega$, то его энергия $\varepsilon_n$ должна быть кратной этой величине:

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.55}$$

В состоянии равновесия распределение колебаний по значениям энергии должно подчиняться закону Больцмана. Согласно формуле (2.83) кн. 3 вероятность $P_n$ того, что энергия колебания частоты $\omega$ имеет значение $\varepsilon_n$, определяется выражением

$$P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{\exp(-\varepsilon_n/kT)}{\sum\limits_n \exp(-\varepsilon_n/kT)} \tag{1.56}$$

(мы заменили $N_i$ на $N_n$ и $E_i$ на $\varepsilon_n$).

Зная вероятность различных значений энергии колебания, можно найти среднее значение этой энергии $\langle\varepsilon\rangle$. В соответствии с формулой (2.5) кн. 3

$$\langle\varepsilon\rangle = \sum_n P_n \varepsilon_n.$$

Подставив выражения (1.55) и (1.56) для $\varepsilon_n$ и $P_n$, получим для среднего значения энергии излучения частоты $\omega$ следующую формулу:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \exp(-n\hbar\omega/kT)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega/kT)}. \tag{1.57}$$

Чтобы произвести вычисления, обозначим $\hbar\omega/kT = x$ и допустим, что $x$ может изменяться, принимая непрерывный ряд значений. Тогда выражение (1.57) можно написать в виде

$$\langle\varepsilon\rangle = \hbar\omega \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \exp(-nx)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx). \tag{1.58}$$

Под знаком логарифма в формуле (1.58) стоит сумма членов бесконечной геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем прогрессии, равным $\exp(-x)$. Так как знаменатель меньше единицы,

прогрессия будет убывающей, и по известной из алгебры формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = \frac{1}{1-\exp(-x)}.$$

Подставив это значение суммы в (1.58) и выполнив дифференцирование, получим

$$\langle\varepsilon\rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1-\exp(-x)} = \\ = \hbar\omega \frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)} = \frac{\hbar\omega}{\exp x - 1}.$$

Наконец, заменив $x$ его значением $\hbar\omega/kT$, получим окончательное выражение для средней энергии излучения частоты $\omega$:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{1.59}$$

Заметим, что при $\hbar$, стремящемся к нулю, формула (1.59) переходит в классическое выражение $\langle\varepsilon\rangle = kT$. В этом можно убедиться, положив $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1+\hbar\omega/kT$, что выполняется тем точнее, чем меньше $\hbar$. Таким образом, если бы энергия могла принимать непрерывный ряд значений, ее среднее значение было бы равно $kT$.

Перемножив выражения (1.50) и (1.59), получим плотность энергии, приходящуюся на интервал частот $d\omega$:

$$u(\omega, T)\, d\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \frac{\omega^2\, d\omega}{\pi^2 c^3}.$$

Отсюда

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{1.60}$$

Воспользовавшись соотношением (1.15), придем к формуле

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{1.61}$$

Выражения (1.60) и (1.61) носят название формулы Планка. Эта формула точно согласуется с экспериментальными данными во всем интервале частот от 0 до $\infty$. Функция (1.61) удовлетворяет критерию Вина (1.18). При

условии, что $\hbar\omega/kT \ll 1$ (малые частоты или большие длины волн), экспоненту $\exp(\hbar\omega/kT)$ можно положить приближенно равной $1+\hbar\omega/kT$, в результате чего формула Планка ((1.60) или (1.61)) переходит в формулу Рэлея–Джинса ((1.51) или (1.52)). Это следует также из того, что при указанном условии выражение (1.59) приближенно равняется $kT$.

Осуществив преобразование выражения (1.61) по формуле (1.10), получим

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2\hbar c^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp[2\pi\hbar c/(kT\lambda)] - 1}. \qquad (1.62)$$

На рис. 1.15 сопоставлены графики функций (1.61) и (1.62), построенные для одной и той же температуры (5000 К). Масштабы по оси абсцисс логарифмические и выбраны так, что связанные соотношением $\lambda = 2\pi c/\omega$ значения $\lambda$ и $\omega$ совмещены друг с другом. Из рисунка видно, что частота $\omega_m$, соответствующая максимуму $f(\omega, T)$, не совпадает с $2\pi c/\lambda_m$, где $\lambda_m$ — длина волны, отвечающая максимуму $\varphi(\lambda, T)$. Для энергетической светимости абсолютно черного тела получается выражение

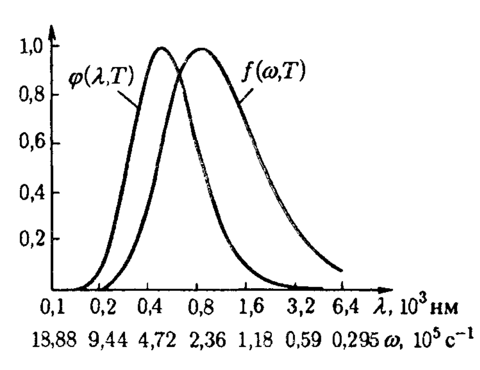


Рис. 1.15

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega, T)\,d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2}\frac{d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Введем вместо $\omega$ безразмерную переменную $x = \hbar\omega/kT$. Подстановка $\omega = (kT/\hbar)x$, $d\omega = (kT/\hbar)\,dx$ преобразует формулу для $R^*$ к виду

$$R^* = \frac{\hbar}{4\pi^2c^2}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{\exp x - 1}.$$

Определенный интеграл в последнем выражении может быть вычислен. Он равен $\pi^4/15 \approx 6,5$. Подставив его значение, мы придем к закону Стефана–Больцмана:

$$R^* = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4. \tag{1.63}$$

Подстановка в эту формулу числовых значений $k$, $c$ и $\hbar$ дает для постоянной Стефана–Больцмана значение равное $5,6696 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2$·К$^4$), согласующееся с экспериментальным значением (1.17).

В заключение найдем значение постоянной в законе смещения Вина (1.21). Для этого продифференцируем функцию (1.62) по $\lambda$ и приравняем получившееся выражение нулю:

$$\frac{d\varphi(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^6 \{\exp[2\pi\hbar c/(kT\lambda)] - 1\}^2} \times$$
$$\times \left[ \frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda} \exp\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda} - 5\left(\exp\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda} - 1\right)\right] = 0.$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ соответствуют минимумам функции $\varphi(\lambda, T)$. Значение $\lambda_m$, при котором функция достигает максимума, обращает в нуль выражение, стоящее в квадратных скобках. Введя обозначение $2\pi\hbar c/(kT\lambda_m) = x$, получим уравнение

$$x \exp x - 5(\exp x - 1) = 0.$$

Решение[10]) этого трансцендентного уравнения дает $x = 4,965$. Следовательно, $2\pi\hbar c/(kT\lambda_m) = 4,965$, откуда

$$T\lambda_m = \frac{2\pi\hbar c}{4,965 k} = b. \tag{1.64}$$

Подстановка числовых значений $\hbar$, $c$ и $k$ дает для $b$ значение, совпадающее с экспериментальным значением (1.22).

Таким образом, формула Планка дает исчерпывающее описание равновесного теплового излучения.

---

[10]) Решение можно найти методом последовательных приближений. Замечая, что $\exp 5 \gg 1$, можно в первом приближении написать уравнение в виде $x \exp x - 5 \exp x \approx 0$, откуда $x \approx 5$. Второе приближение получим из уравнения $x \exp 5 - 5(\exp 5 - 1) = 0$ и т. д.

# Глава 2

# Фотоны

## 2.1. Тормозное рентгеновское излучение

В предыдущей главе мы узнали, что для объяснения свойств теплового излучения пришлось ввести представление об испускании электромагнитного излучения порциями $\hbar\omega$. Квантовая природа излучения подтверждается также существованием коротковолновой границы тормозного рентгеновского спектра.

Рентгеновские лучи возникают при бомбардировке быстрыми электронами твердых мишеней. Рентгеновская трубка (рис. 2.1) представляет собой эвакуированный баллон с несколькими электродами. Нагреваемый током катод $K$ служит источником свободных электронов, испускаемых вследствие термоэлектронной эмиссии (см. § 9.2). Цилиндрический электрод $Ц$ предназначен для фокусировки электронного пучка. Мишенью является анод $A$, который называют также антикатодом. Его делают из тяжелых металлов (W, Cu, Pt и т. д.). Ускорение электронов осуществляется высоким напряжением, создаваемым между катодом и антикатодом. Почти вся энергия электронов выделяется на антикатоде в виде теплоты (в излучение превращается лишь 1–3% энергии). Поэтому в мощных трубках антикатод приходится интенсивно охлаждать. С этой целью в теле антикатода делаются каналы, по которым циркулирует охлаждающая жидкость (вода или масло).

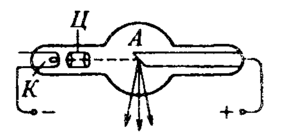



Рис. 2.1

Если между катодом и антикатодом приложено напряжение $U$, электроны разгоняются до энергии $eU$. Попав в вещество антикатода, электроны испытывают сильное торможение и становятся источником электромагнитных волн. Мощность излучения $P$ пропорциональна квадрату заряда электрона и квадрату его ускорения: $P \sim e^2 w^2$ (см. формулу (2.46) кн. 4).

Предположим, что ускорение электрона $w$ остается постоянным в течение всего времени торможения $\tau$. Тогда мощность излучения также будет постоянной, и за время торможения электрон излучит энергию

$$E = P\tau \sim e^2 w^2 \tau = e^2 v_0^2/\tau,$$

где $v_0$ — начальная скорость электрона.

Полученный результат показывает, что заметное излучение может наблюдаться лишь при резком торможении быстрых электронов. На рентгеновские трубки подается напряжение до 50 кВ. Пройдя такую разность потенциалов, электрон приобретает скорость, равную $0,4\,c$. В бетатроне (см. § 10.5 кн. 2) электроны могут быть ускорены до энергии 50 МэВ. Скорость электронов при такой энергии составляет $0,99995\,c$. Направив ускоренный в бетатроне пучок электронов на твердую мишень, получают рентгеновские лучи весьма малой длины волны. Чем меньше длина волны, тем меньше поглощаются лучи в веществе. Поэтому рентгеновские лучи, получаемые на бетатроне, обладают особенно большой проникающей способностью.

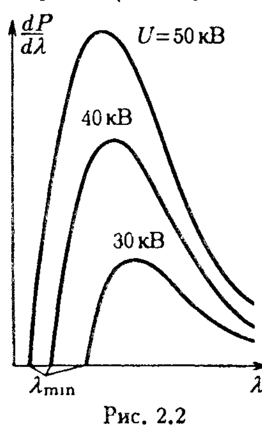


Рис. 2.2

При достаточно большой скорости электронов, кроме **тормозного излучения** (т. е. излучения, обусловленного торможением электронов), возбуждается также **характеристическое излучение** (вызванное возбуждением внутренних электронных оболочек атомов антикатода). Это излучение рассматривается в § 5.11. Сейчас нас будет интересовать лишь тормозное излучение. Согласно классической электродинамике при торможении электрона должны возникать волны всех длин — от нуля до бесконечности. Длина волны, на которую приходится максимум мощности излучения, должна уменьшаться по мере увеличения скорости электронов, т. е. напряжения на трубке $U$. На рис. 2.2 даны экспериментальные кривые распределения мощности тормозного рентгеновского излучения по длинам волн, полученные для разных значений $U$. Как видно из рисунка, выводы теории в основном подтверждаются на опыте. Однако имеется одно принципиальное отступление от требований классической электродинамики. Оно

заключается в том, что кривые распределения мощности не идут к началу координат, а обрываются при конечных значениях длины волны $\lambda_{\min}$. Экспериментально установлено, что коротковолновая граница тормозного рентгеновского спектра $\lambda_{\min}$ связана с ускоряющим напряжением $U$ соотношением

$$\lambda_{\min} = \frac{12\,390}{U}, \tag{2.1}$$

где $\lambda_{\min}$ выражена в ангстремах, а $U$ — в вольтах.

Существование коротковолновой границы непосредственно вытекает из квантовой природы излучения. Действительно, если излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении, то квант $\hbar\omega$ не может превысить энергию электрона $eU$:

$$\hbar\omega \leq eU.$$

Отсюда получается, что частота излучения не может превысить значения $\omega_{\max} = eU/\hbar$, а, следовательно, длина волны не может быть меньше значения

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{(2\pi\hbar c/e)}{U}. \tag{2.2}$$

Таким образом, мы пришли к эмпирическому соотношению (2.1). Найденное из сопоставления формул (2.1) и (2.2) значение $\hbar$ хорошо согласуется со значениями, определенными иными способами. Из всех методов определения $\hbar$ метод, основанный на измерении коротковолновой границы тормозного рентгеновского спектра, считается самым точным.

## 2.2. Фотоэффект

Фотоэлектрическим эффектом или **фотоэффектом** называется испускание электронов веществом под действием света. Это явление было открыто Г. Герцем в 1887 г. Он заметил, что проскакивание искры между шариками разрядника значительно облегчается, если один из шариков осветить ультрафиолетовыми лучами.

В 1888–1889 гг. А.Г. Столетов подверг фотоэффект систематическому исследованию с помощью установки, схема которой показана на рис. 2.3. Конденсатор, образованный проволочной сеткой и сплошной пластиной, был включен последовательно с гальванометром $G$ в цепь батареи. Свет, проходя через сетку, падал на сплошную

пластину. В результате в цепи возникал ток, регистрировавшийся гальванометром. На основании своих опытов Столетов пришел к следующим выводам: 1) наибольшее действие оказывают ультрафиолетовые лучи; 2) сила тока возрастает с увеличением освещенности пластины; 3) испускаемые под действием света заряды имеют отрицательный знак.

Спустя 10 лет (в 1898 г.) Ленард[1]) и Дж.Дж. Томсон, измерив удельный заряд испускаемых под действием света частиц, установили, что эти частицы являются электронами.

Ленард и другие исследователи усовершенствовали прибор Столетова, поместив электроды в эвакуированный баллон (рис. 2.4). Свет, проникающий через кварцевое[2])

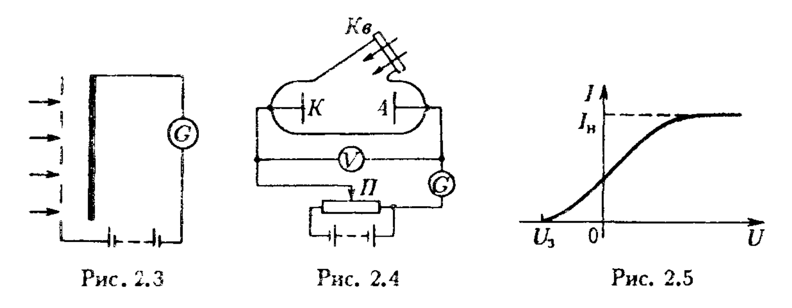



Рис. 2.3 Рис. 2.4 Рис. 2.5

окошко *Кв*, освещает катод *К*, изготовленный из исследуемого материала. Электроны, испущенные вследствие фотоэффекта, перемещаются под действием электрического поля к аноду *А*. В результате в цепи прибора течет фототок, измеряемый гальванометром *G*. Напряжение между анодом и катодом можно изменять с помощью потенциометра *П*.

Полученная на таком приборе вольт-амперная характеристика (т. е. кривая зависимости фототока *I* от напряжения между электродами *U*) приведена на рис. 2.5. Естественно, что характеристика снимается при неизменном потоке света Ф. Из этой кривой видно, что при некотором не очень большом напряжении фототок достигает насыщения — все электроны, испущенные катодом, попадают

---

[1]) Филипп Эдуард Антон Ленард (1862–1947) — немецкий физик.

[2]) В отличие от обычного стекла кварц пропускает ультрафиолетовые лучи.

на анод. Следовательно, сила тока насыщения $I_н$ определяется количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света.

Пологий ход кривой указывает на то, что электроны вылетают из катода с различными скоростями. Доля электронов, отвечающая силе тока при $U = 0$, обладает скоростями, достаточными для того, чтобы долететь до анода «самостоятельно», без помощи ускоряющего поля. Для обращения силы тока в нуль нужно приложить задерживающее напряжение $U_з$. При таком напряжении ни одному из электронов, даже обладающему при вылете из катода наибольшим значением скорости $v_m$, не удается преодолеть задерживающее поле и достигнуть анода. Поэтому можно написать, что

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_з, \tag{2.3}$$

где $m$ — масса электрона. Таким образом, измерив задерживающее напряжение $U_з$, можно определить максимальное значение скорости фотоэлектронов.

К 1905 г. было выяснено, что максимальная скорость фотоэлектронов не зависит от интенсивности света, а зависит только от его частоты — увеличение частоты приводит к возрастанию скорости. Установленные экспериментально зависимости не укладываются в рамки классических представлений. Например, скорость фотоэлектронов по классическим понятиям должна возрастать с амплитудой, а, следовательно, и с интенсивностью электромагнитной волны.

В 1905 г. А. Эйнштейн показал, что все закономерности фотоэффекта легко объясняются, если предположить, что свет поглощается такими же порциями $\hbar\omega$ (квантами), какими он, по предположению Планка, испускается. По мысли Эйнштейна, энергия, полученная электроном, доставляется ему в виде кванта $\hbar\omega$, который усваивается им целиком. Часть этой энергии, равная работе выхода $A$[3]), затрачивается на то, чтобы электрон мог покинуть тело. Если электрон освобождается светом не у самой поверхности, а на некоторой глубине, то часть энергии, равная $E'$, может быть потеряна вследствие случайных столкновений

[3]) Работой выхода называется наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум (см. § 9.1).

в веществе. Остаток энергии образует кинетическую энергию $E_к$ электрона, покинувшего вещество. Энергия $E_к$ будет максимальна, если $E' = 0$. В этом случае должно выполняться соотношение

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}mv_m^2 + A, \tag{2.4}$$

которое называется формулой Эйнштейна.

Фотоэффект и работа выхода в сильной степени зависят от состояния поверхности металла (в частности, от находящихся на ней окислов и адсорбированных веществ). Поэтому долгое время не удавалось проверить формулу Эйнштейна с достаточной точностью. В 1916 г. Милликен создал прибор, в котором исследуемые поверхности подвергались очистке в вакууме, после чего измерялась работа выхода и исследовалась зависимость максимальной кинетической энергии фотоэлектронов от частоты света (эта энергия определялась путем измерения задерживающего потенциала $U_з$). Результаты оказались в полном согласии с формулой (2.4).

Подставив в формулу (2.4) измеренные значения $A$ и $mv_m^2/2$ (при данной $\omega$), Милликен определил значение постоянной Планка $\hbar$, которое оказалось совпадающим со значениями, найденными из спектрального распределения равновесного теплового излучения и из коротковолновой границы тормозного рентгеновского спектра.

Дальнейшее усовершенствование методики исследования фотоэффекта было осуществлено в 1928 г. П.И. Лукирским[4]) и С.С. Прилежаевым, которые создали прибор в виде сферического конденсатора. Анодом в их приборе служили посеребренные стенки стеклянного сферического баллона. В центре баллона помещался катод в виде шарика. При такой форме электродов вольт-амперная характеристика идет круче, что позволяет повысить точность определения задерживающего потенциала.

Из формулы (2.4) вытекает, что в случае, когда работа выхода $A$ превышает энергию кванта $\hbar\omega$, электроны не могут покинуть металл. Следовательно, для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия $\hbar\omega \geq A$, или

$$\omega \geq \omega_0 = A/\hbar. \tag{2.5}$$

[4]) Петр Иванович Лукирский (1894–1954) — советский физик.

Соответственно для длины волны получается условие

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \qquad (2.6)$$

Частота $\omega_0$ или длина волны $\lambda_0$ называется **красной границей фотоэффекта**.

Число высвобождаемых вследствие фотоэффекта электронов должно быть пропорционально числу падающих на поверхность квантов света. Вместе с тем световой поток $\Phi$ определяется количеством квантов света, падающих на поверхность в единицу времени. В соответствии с этим ток насыщения $I_н$ должен быть пропорционален падающему световому потоку:

$$I_н \sim \Phi. \qquad (2.7)$$

Эта зависимость также подтверждается экспериментально. Заметим, что лишь малая часть квантов передает свою энергию фотоэлектронам. Энергия остальных квантов затрачивается на нагревание вещества, поглощающего свет.

В рассмотренном выше явлении фотоэффекта электрон получает энергию от одного лишь фотона. Такие процессы называются **однофотонными**. С изобретением лазеров были получены недостижимые до тех пор мощности световых пучков. Это дало возможность осуществить **многофотонные** процессы. В частности, был наблюден **многофотонный фотоэффект**, в ходе которого электрон, вылетающий из металла,получает энергию не от одного, а от $N$ фотонов ($N = 2, 3, 4, 5$).

Формула Эйнштейна в случае многофотонного фотоэффекта выглядит следующим образом:

$$N\hbar\omega = \frac{1}{2}mv_m^2 + A. \qquad (2.8)$$

Соответственно красная граница фотоэффекта смещается в сторону более длинных волн ($\lambda_0$ увеличивается в $N$ раз). Формула (2.7) в случае $N$-фотонного эффекта имеет вид

$$I_N \sim \Phi^N. \qquad (2.9)$$

Кроме рассмотренного нами в этом параграфе **внешнего фотоэффекта** (называемого обычно просто фотоэффектом), существует также **внутренний фотоэффект**, наблюдаемый в диэлектриках и полупроводниках. О нем будет идти речь в § 9.6.

## 2.3. Опыт Боте. Фотоны

Чтобы объяснить распределение энергии в спектре равновесного теплового излучения, достаточно, как показал Планк, допустить, что свет только испускается порциями $\hbar\omega$. Для объяснения фотоэффекта достаточно предположить, что свет поглощается такими же порциями. Однако Эйнштейн пошел значительно дальше. Он выдвинул гипотезу, что свет и распространяется в виде дискретных частиц, названных первоначально **световыми квантами**. Впоследствии эти частицы получили название **фотонов**[5]).

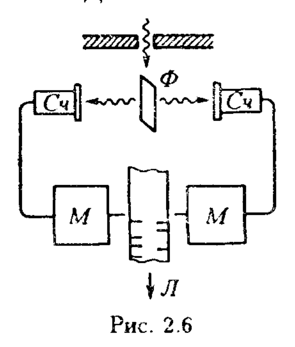



Рис. 2.6

Наиболее непосредственное подтверждение гипотезы Эйнштейна дал **опыт Боте**[6]). Тонкая металлическая фольга *Ф* (рис. 2.6) помещалась между двумя газоразрядными счетчиками *Сч* (см. § 12.3 кн. 2). Фольга освещалась слабым пучком рентгеновских лучей (это явление называется **рентгеновской флуоресценцией**). Вследствие малой интенсивности первичного пучка количество квантов, испускаемых фольгой, было невелико. При попадании в него рентгеновских лучей счетчик срабатывал и приводил в действие особый механизм *М*, делавший отметку на движущейся ленте *Л*. Если бы излучаемая энергия распространялась равномерно во все стороны, как это следует из волновых представлений, оба счетчика должны были бы срабатывать одновременно и отметки на ленте приходились бы одна против другой. В действительности же наблюдалось совершенно беспорядочное расположение отметок. Это можно объяснить лишь тем, что в отдельных актах испускания возникают световые частицы, летящие то в одном, то в другом направлении.

Итак, было экспериментально доказано существование особых световых частиц — **фотонов**. Энергия фотона определяется его частотой:

$$E = \hbar\omega. \tag{2.10}$$

---

[5]) Термин «фотон» был введен в 1926 г.

[6]) Вальтер Боте (1891–1957) — немецкий физик.

Рекомендуем читателю убедиться в том, что длине волны $\lambda = 5000$ Å (зеленая область спектра) соответствует энергия фотона $\hbar\omega = 2{,}5$ эВ; при $\lambda = 1$ Å $\hbar\omega = 12{,}5$ кэВ.

Электромагнитная волна обладает импульсом (см. § 2.5 кн. 4). Соответственно должен обладать импульсом и фотон. Чтобы определить импульс фотона, воспользуемся соотношениями теории относительности. Рассмотрим две системы отсчета $K$ и $K'$, движущиеся относительно друг друга со скоростью $\mathbf{v}_0$. Оси $x$ и $x'$ направим вдоль $\mathbf{v}_0$. Пусть в направлении этих осей летит фотон. Энергия фотона в системах $K$ и $K'$ равна соответственно $\hbar\omega$ и $\hbar\omega'$. Частоты $\omega$ и $\omega'$ связаны соотношением

$$\omega' = \omega\frac{1 - v_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

(см. § 8.4 кн. 4). Следовательно,

$$E' = E\frac{1 - v_o/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \tag{2.11}$$

Обозначим импульс фотона в системе $K$ символом $\mathbf{p}$, в системе $K'$ — символом $\mathbf{p}'$. Из соображений симметрии следует, что импульс фотона должен быть направлен вдоль оси $x$. Поэтому $p_x = p$, $p'_x = p'$. При переходе от одной системы отсчета к другой энергия и импульс преобразуются по формуле

$$E' = \frac{E - v_o p_x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \tag{2.12}$$

(см. формулу (6.64) кн. 1; мы написали формулу обратного преобразования, в связи с чем изменили знак перед $v_0 p_x$). В рассматриваемом нами случае можно заменить в (2.12) $p_x$ на $p$.

Из сопоставления формул (2.11) и (2.12) следует, что

$$E(1 - v_0/c) = E - v_0 p$$

(мы написали $p$ вместо $p_x$). Отсюда

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{2.13}$$

В § 6.9 кн. 1 было показано, что такое соотношение между импульсом и энергией возможно только для частиц с нулевой массой, движущихся со скоростью $c$. Таким образом, из квантового соотношения $E = \hbar\omega$ и общих принципов теории относительности вытекает, что

1) масса фотона равна нулю,

2) фотон всегда движется со скоростью $c$.

Сказанное означает, что фотон представляет собой частицу особого рода, отличную от таких частиц, как электрон, протон и т. п., которые могут существовать, двигаясь со скоростями, меньшими $c$, и даже покоясь.

Заменив в формуле (2.13) частоту $\omega$ через длину волны $\lambda$, получим для импульса фотона выражение

$$p = \frac{\hbar \cdot 2\pi}{\lambda} = \hbar k \tag{2.14}$$

($k$ — волновое число). Фотон летит в направлении распространения электромагнитной волны. Поэтому направления импульса $\mathbf{p}$ и волнового вектора $\mathbf{k}$ совпадают. Следовательно, формулу (2.14) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{2.15}$$

Пусть на поглощающую свет поверхность падает поток фотонов, летящих по нормали к поверхности. Если плотность фотонов равна $n$, на единицу поверхности падает в единицу времени $nc$ фотонов. При поглощении каждый фотон сообщает стенке импульс

$$p = E/c.$$

Умножив $p$ на $nc$, получим импульс, сообщаемый в единицу времени единице поверхности, т. е. давление $\mathcal{P}$ света на стенку:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{c} \cdot nc = En.$$

Произведение $En$ равно энергии фотонов, заключенных в единице объема, т. е. плотности электромагнитной энергии $w$. Таким образом, мы пришли к формуле

$$\mathcal{P} = w,$$

которая совпадает с выражением для давления, получающимся из электромагнитной теории (см. формулу (2.40) кн. 4). Отражаясь от стенки, фотон сообщает ей импульс $2p$. Поэтому для отражающей поверхности давление будет равно $2w$.

Исходя из представления об электромагнитном поле как совокупности фотонов, легко получить соотношение между испускательной способностью абсолютно черного тела и равновесной плотностью излучения. Допустим, что в единице объема полости, заполненной равновесным излучением, имеется $dn_\omega$ фотонов, частота которых лежит в пределах от $\omega$ до $\omega + d\omega$. Тогда плотность энергии, приходящаяся на тот же интервал частот, будет равна

$$du_\omega = u(\omega, T)\, d\omega = \hbar\omega\, dn_\omega. \qquad (2.16)$$

Подобно молекулам газа, фотоны летят внутри полости по всем направлениям. Воспользовавшись формулой (2.23) кн. 3, получим для числа фотонов, ударяющихся об единицу поверхности в единицу времени, значение $c dn_\omega/4$. Если стенка абсолютно черная, она поглотит все эти фотоны и, следовательно, получит энергию, равную $\hbar\omega c dn_\omega/4$. В случае равновесия абсолютно черная стенка испустит такую же энергию. Таким образом,

$$f(\omega, T)\, d\omega = \frac{1}{4}\hbar\omega c\, dn_\omega. \qquad (2.17)$$

Из сопоставления выражений (2.16) и (2.17) вытекает, что

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T) \qquad (2.18)$$

(ср. с формулой (1.15)).

В данной главе мы рассмотрели ряд явлений, в которых свет ведет себя как поток частиц (фотонов). Однако не надо забывать, что такие явления, как интерференция и дифракция света, могут быть объяснены только на основе волновых представлений. Таким образом, свет обнаруживает **корпускулярно-волновой дуализм** (двойственность): в одних явлениях проявляется его волновая природа, и он ведет себя как электромагнитная волна, в других явлениях проявляется корпускулярная природа света, и он ведет себя как поток фотонов. В § 4.1 мы увидим, что корпускулярно-волновой дуализм присущ не только световым частицам, но и частицам вещества (электронам, протонам, атомам и т. д.).

Выясним, в каком соотношении находятся волновая и корпускулярная картины. Ответ на этот вопрос можно получить, рассмотрев с обеих точек зрения освещенность какой-либо поверхности. Согласно волновым представлениям освещенность в некоторой точке поверхности про-

порциональна квадрату амплитуды световой волны. С корпускулярной точки зрения освещенность пропорциональна плотности потока фотонов. Следовательно, между квадратом амплитуды световой волны и плотностью потока фотонов имеется прямая пропорциональность. Носителем энергии и импульса является фотон. Энергия выделяется в той точке поверхности, в которую попадает фотон. Квадрат амплитуды волны определяет вероятность того, что фотон попадает в данную точку поверхности. Точнее, вероятность того, что фотон будет обнаружен в пределах объема $dV$, заключающего в себе рассматриваемую точку пространства, определяется выражением

$$dP = \chi A^2\, dV,$$

где $\chi$ — коэффициент пропорциональности, $A$ — амплитуда световой волны.

Из сказанного вытекает, что распределение фотонов по поверхности, на которую падает свет, должно иметь статистический характер. Наблюдаемая на опыте равномерность освещенности обусловлена тем, что обычно плотность потока фотонов бывает очень большой. Так, например, при освещенности, равной 50 лк (такая освещенность нужна, чтобы глаза не утомлялись при чтении), и длине волны 5500 Å на 1 см$^2$ поверхности падает примерно $2 \cdot 10^{13}$ фотонов в секунду. Относительная флуктуация [7]) обратно пропорциональна квадратному корню из числа частиц (см. формулу (2.89) кн. 3). Поэтому при указанном значении потока фотонов флуктуации оказываются ничтожными, и поверхность представляется освещенной равномерно.

Флуктуации слабых световых потоков были обнаружены С.И. Вавиловым и его сотрудниками. Они установили, что в области наибольшей чувствительности ($\lambda = 5550$ Å) глаз начинает реагировать на свет при попадании на зрачок примерно 200 фотонов в секунду. При такой интенсивности Вавилов наблюдал флуктуации светового потока, носившие отчетливо выраженный статистический характер. Правда, следует иметь в виду, что наблюдавшиеся в опытах Вавилова колебания светового восприятия были обусловлены не только флуктуациями светового потока, но также и флуктуациями, связанными с физиологическими процессами, протекающими в глазу.

[7]) Напомним, что относительными флуктуациями называются относительные отклонения статистических величин от среднего значения.

## 2.4. Эффект Комптона

Особенно отчетливо проявляются корпускулярные свойства света в явлении, которое получило название **эффекта Комптона**. В 1923 г. Комптон[8]), исследуя рассеяние рентгеновских лучей различными веществами, обнаружил, что в рассеянных лучах наряду с излучением первоначальной длины волны $\lambda$ содержатся также лучи большей длины волны $\lambda'$. Разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ оказалась зависящей только от угла $\vartheta$, образуемого направлением рассеянного излучения с направлением первичного пучка. От длины волны $\lambda$ и от природы рассеивающего вещества $\Delta\lambda$ не зависит.

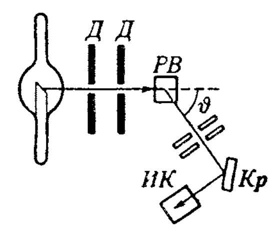


Рис. 2.7

Схема опыта Комптона показана на рис. 2.7. Выделяемый диафрагмами *Д* узкий пучок монохроматического (характеристического) рентгеновского излучения направлялся на рассеивающее вещество *РВ*. Спектральный состав рассеянного излучения исследовался с помощью рентгеновского спектрографа, состоящего из кристалла *Кр* и ионизационной камеры *ИК*.

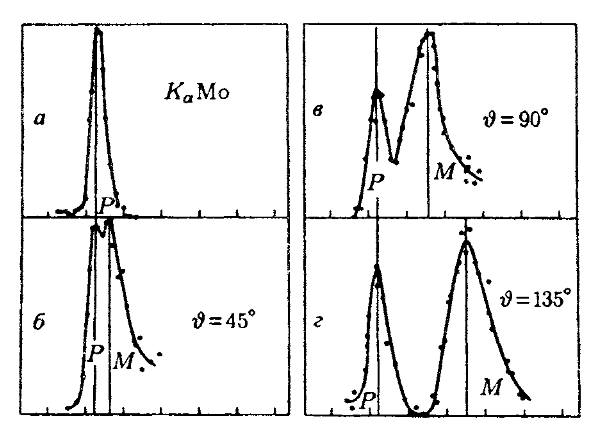


Рис. 2.8

На рис. 2.8 приведены результаты исследования рассеяния монохроматических рентгеновских лучей (линия

[8]) Артур Холли Комптон (1892-1962) — американский физик.

$K_\alpha$ [9]) молибдена) на графите. Кривая на рис. 2.8 *а* характеризует первичное излучение; кривые на рис. 2.8 *б–г* относятся к разным углам рассеяния $\vartheta$, значения которых указаны на рисунке. По оси ординат отложена интенсивность излучения, по оси абсцисс — длина волны.

Рисунок 2.9 характеризует зависимость соотношения интенсивностей смещенной $M$ и несмещенной $P$ компонент от атомного номера рассеивающего вещества. Кривая в левом столбце характеризует первичное излучение (верхняя линия $K_\alpha$ серебра). При рассеянии веществами

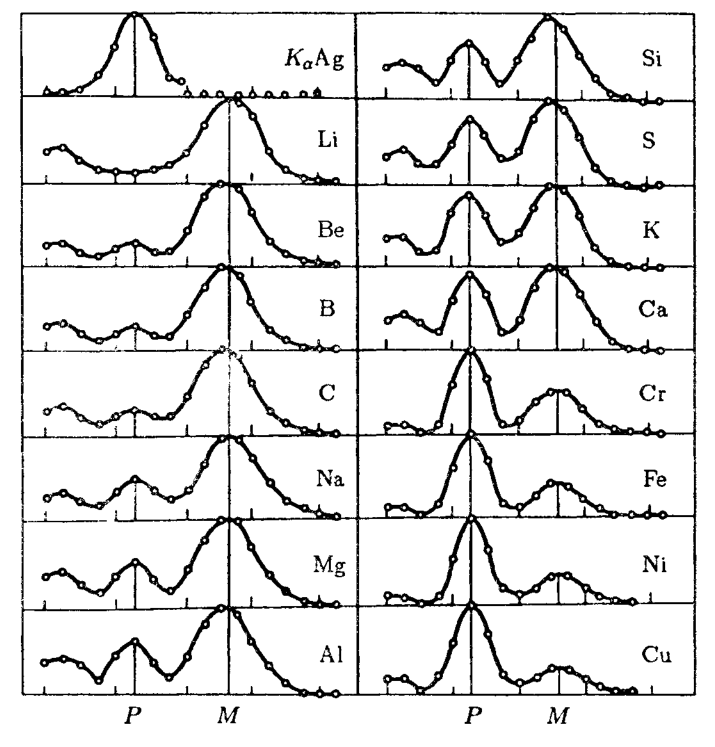



Рис. 2.9

с малым атомным номером (Li, Be, B) практически все рассеянное излучение имеет смещенную длину волны. По мере увеличения атомного номера все большая часть излучения рассеивается без изменения длины волны.

[9]) См. § 5.11.

Все особенности эффекта Комптона можно объяснить, рассматривая рассеяние как процесс упругого столкновения рентгеновских фотонов с практически свободными электронами. Свободными можно считать слабее всего связанные с атомами электроны, энергия связи которых значительно меньше той энергии, которую фотон может передать электрону при соударении [10]).

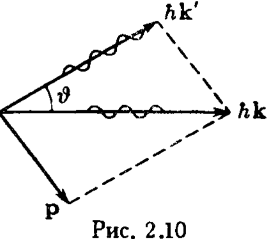


Рис. 2.10

Пусть на первоначально покоящийся свободный электрон падает фотон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ (рис. 2.10). Энергия электрона до столкновения равна $mc^2$ ($m$ — масса электрона), импульс равен нулю. После столкновения электрон будет обладать импульсом $\mathbf{p}$ и энергией, равной $c\sqrt{p^2+m^2c^2}$ (см. формулу (6.57) кн. 1). Энергия и импульс фотона также изменятся и станут равными $\hbar\omega'$ и $\hbar\mathbf{k}'$. Из законов сохранения энергии и импульса вытекают два равенства:

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2+m^2c^2}, \qquad (2.19)$$

$$\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}'. \qquad (2.20)$$

Разделим первое равенство на $c$ и напишем его в виде

$$\sqrt{p^2+m^2c^2} = \hbar(k-k') + mc$$

($\omega/c = k$). Возведение в квадрат дает

$$p^2 = \hbar^2(k^2+k'^2-2kk') + 2\hbar mc(k-k'). \qquad (2.21)$$

Из (2.20) следует, что

$$p^2 = \hbar^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 = \hbar^2(k^2+k'^2-2kk'\cos\vartheta) \qquad (2.22)$$

($\vartheta$ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$; см. рис. 2.10).

Из сравнения выражений (2.21) и (2.22) получаем

$$mc(k-k') = \hbar kk'(1-\cos\vartheta).$$

Умножим это равенство на $2\pi$ и разделим на $mckk'$:

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1-\cos\vartheta).$$

---

[10]) При упругом соударении фотон не может передать электрону (или какой-либо другой частице) всю свою энергию. Такой процесс нарушал бы законы сохранения энергии и импульса.

Наконец, учтя, что $2\pi/k = \lambda$, придем к формуле

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta), \tag{2.23}$$

где

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \tag{2.24}$$

Определяемая выражением (2.24) величина $\lambda_C$ называется комптоновской длиной волны[11] той частицы, масса которой имеется в виду. В рассматриваемом нами случае $\lambda_C$ — комптоновская длина волны электрона. Подстановка в (2.24) значений $\hbar$, $m$ и $c$ дает для $\lambda_C$ электрона значение

$$\lambda_C = 0,0243 \text{ Å} \tag{2.25}$$

($\lambda_C = 0,00386$ Å).

Результаты измерений Комптона и последующих измерений находятся в полном согласии с формулой (2.23), если подставить в нее значение (2.25) для $\lambda_C$.

При рассеянии фотонов на электронах, связь которых с атомом велика, обмен энергией и импульсом происходит с атомом как целым. Поскольку масса атома намного превосходит массу электрона, комптоновское смещение в этом случае ничтожно и $\lambda'$ практически совпадает с $\lambda$. По мере роста атомного номера увеличивается относительное число электронов с сильной связью, чем и обусловливается ослабление смещенной линии (см. рис. 2.9).

[11]) Комптоновской длиной волны называют также величину $\lambda_C = \hbar/(mc)$.

# Часть II
# Атомная физика

## Глава 3
## Боровская теория атома

### 3.1. Закономерности в атомных спектрах

Излучение невзаимодействующих друг с другом атомов состоит из отдельных спектральных линий. В соответствии с этим спектр испускания атомов называется

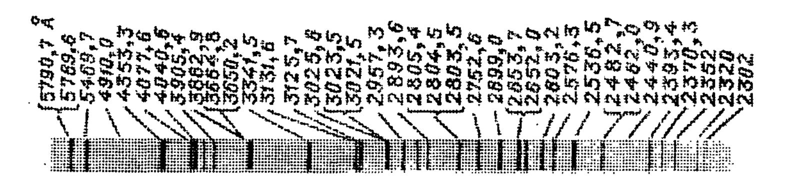


Рис. 3.1

линейчатым. На рис. 3.1 показан спектр испускания паров ртути. Такой же характер имеют и спектры других атомов.

Изучение атомных спектров послужило ключом к познанию строения атомов. Прежде всего было замечено, что линии в спектрах атомов расположены не беспорядочно, а объединяются в группы, или, как их называют, серии линий. Отчетливее всего это обнаруживается в спектре простейшего атома — водорода. На рис. 3.2 представлена часть спектра атомарного водорода в видимой и близкой ультрафиолетовой области. Символами $H_\alpha$, $H_\beta$, $H_\gamma$ и $H_\delta$ обозначены видимые линии, $H_\infty$ указывает границу серии (см. ниже). Очевидно, что линии располагаются в определенном порядке. Расстояние между линиями закономерно убывает по мере перехода от более длинных волн к более коротким.

Рис. 3.2

Бальмер[1]) (1885) обнаружил, что длины волн этой серии линий водорода могут быть точно представлены формулой

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}, \tag{3.1}$$

где $\lambda_0$ — константа, $n$ — целое число, принимающее значения 3, 4, 5 и т. д. Если перейти в (3.1) от длины волны к частоте, получится формула

$$\omega = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 3, 4, 5, \ldots), \tag{3.2}$$

где $R$ — константа, называемая постоянной Ридберга[2]). Она равна

$$R = 2{,}07 \cdot 10^{16}\ \text{с}^{-1}. \tag{3.3}$$

Формула (3.2) называется формулой Бальмера[3]), а соответствующая серия спектральных линий водородного атома — серией Бальмера. Дальнейшие исследования показали, что в спектре водорода имеется еще несколько серий. В ультрафиолетовой части спектра находится серия Лаймана. Остальные серии лежат в инфракрасной области. Линии этих серий могут быть пред-

---

[1]) Иоганн Якоб Бальмер (1825–1898) — швейцарский физик и математик.

[2]) Юханнес Роберт Ридберг (1854–1919) — шведский физик.

[3]) В спектроскопии принято характеризовать спектральные линии не частотой, а обратной длине волны величиной

$$\nu' = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c},$$

которую называют волновым числом (не смешивать с волновым числом $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$). Формула Бальмера, написанная для волнового числа, имеет такой же вид, как (3.2):

$$\nu' = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

Постоянная Ридберга имеет в этом случае значение

$$R = 109\,737{,}3177 \pm 0{,}0083\ \text{см}^{-1}.$$

Количество достоверных значащих цифр характеризует точность измерений, достигнутую в спектроскопии. Значение постоянной (3.3) округлено до третьего знака.

ставлены в виде формул, аналогичных (3.2):

серия Лаймана $\omega = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$,

серия Пашена $\omega = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n = 4, 5, 6, \ldots)$,

серия Брэкета $\omega = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n = 5, 6, 7, \ldots)$,

серия Пфунда $\omega = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n = 6, 7, 8, \ldots)$.

Частоты всех линий спектра водородного атома можно представить одной формулой

$$\omega = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{3.4}$$

где $m$ имеет значение 1 для серии Лаймана, 2 — для серии Бальмера и т. д. При заданном $m$ число $n$ принимает все целочисленные значения, начиная с $m + 1$. Выражение (3.4) называют обобщенной формулой Бальмера.

При возрастании $n$ частота линии в каждой серии стремится к предельному значению $R/m^2$, которое называется границей серии (на рис. 3.2 символом $H_\infty$ отмечена граница серии Бальмера).

Возьмем ряд значений выражения $T(n) = R/n^2$:

$$\frac{R}{1^2}, \frac{R}{2^2}, \frac{R}{3^2}, \ldots \tag{3.5}$$

Частота любой линии спектра водорода может быть представлена в виде разности двух чисел ряда (3.5). Эти числа называют спектральными термами или просто термами. Так, например, частота первой линии серии Бальмера равна $T(2)$—$T(3)$, второй линии серии Пфунда $T(5)$—$T(7)$ и т. д.

Изучение спектров других атомов показало, что частоты линий и в этом случае могут быть представлены в виде разностей двух термов.

$$\omega = T_1(m) - T_2(n). \tag{3.6}$$

Однако терм $T(n)$ обычно имеет более сложный вид, чем для водородного атома. Кроме того, первый и второй члены формулы (3.6) берутся из различных рядов термов.

## 3.2. Модель атома Томсона

Согласно классическим представлениям атом мог бы испускать монохроматическую волну (т. е. спектральную линию) в том случае, когда электрон в излучающем атоме совершает гармонические колебания и, следовательно, удерживается около положения равновесия квазиупругой силой вида $F = -kr$, где $r$ — отклонение электрона от положения равновесия. В 1903 г. Дж.Дж. Томсон предложил модель атома, согласно которой атом представляет собой равномерно заполненный положительным электричеством шар, внутри которого находится электрон (рис. 3.3). Суммарный положительный заряд шара равен заряду электрона, так что атом в целом нейтрален.

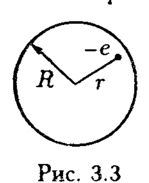



Рис. 3.3

Напряженность поля внутри равномерно заряженного шара определяется выражением [4])

$$E(r) = \frac{e}{R^3} r \quad (0 \le r \le R),$$

где $e$ — заряд шара, $R$ — его радиус (см. формулу (1.127) кн. 2). Следовательно, на электрон, находящийся на расстоянии $r$ от положения равновесия (от центра шара), будет действовать сила:

$$F = (-e)E = -\frac{e^2}{R^3} r = -kr.$$

В таких условиях электрон, выведенный каким-либо образом из положения равновесия, будет совершать колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} \tag{3.7}$$

($e$ — заряд электрона, $m$ — масса электрона, $R$ — радиус атома). Этим соотношением можно воспользоваться для оценки размеров атома. Согласно (3.7)

$$R = \left(\frac{e^2}{m\omega^2}\right)^{1/3}.$$

[4]) Здесь и дальше в этой книге мы пользуемся гауссовой системой единиц.

Длине волны $\lambda = 6000$ Å (видимая область спектра) соответствует $\omega \approx 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Следовательно,

$$R = \left(\frac{4,8^2 \cdot 10^{-20}}{0,91 \cdot 10^{-27} \cdot 3^2 \cdot 10^{30}}\right)^{1/3} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

Полученное значение совпадает по порядку величины с газокинетическими размерами атомов, что можно было бы рассматривать как подтверждение модели Томсона. Однако в дальнейшем выяснилась несостоятельность этой модели, так что в настоящее время она имеет лишь исторический интерес как одно из звеньев в цепи развития представлений о строении атомов.

## 3.3. Опыты по рассеянию $\alpha$-частиц. Ядерная модель атома

Распределение положительных и отрицательных зарядов в атоме можно выяснить, произведя непосредственное опытное «зондирование» внутренних областей атома. Такое зондирование осуществили Резерфорд[5]) и его сотрудники с помощью $\alpha$-частиц, наблюдая изменение направления их полета (рассеяние) при прохождении через тонкие слои вещества.

Напомним, что $\alpha$-частицами называют частицы, испускаемые некоторыми веществами при радиоактивном распаде. Скорости $\alpha$-частиц бывают порядка $10^9$ см/с. В то время, когда Резерфорд приступал к своим опытам, было известно, что $\alpha$-частицы имеют положительный заряд, равный удвоенному элементарному заряду, и что при потере этого заряда (при присоединении электронов) $\alpha$-частица превращается в атом гелия. Опыт осуществлялся следующим образом (рис. 3.4). Выделяемый отверстием узкий пучок $\alpha$-частиц, испускаемых радиоактивным веществом $P$, падал на тонкую металлическую фольгу $\Phi$. При прохождении через фольгу $\alpha$-частицы отклонялись от первоначального направления движения на различные углы $\vartheta$. Рассеянные $\alpha$-частицы ударялись об экран $Э$, покрытый сернистым цинком, и вы-

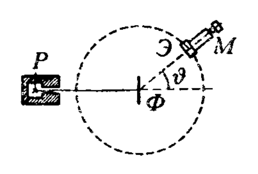


Рис. 3.4

[5]) Эрнест Резерфорд (1871-1937) — английский физик.

зываемые ими сцинтилляции [6]) наблюдались в микроскоп $M$. Микроскоп и экран можно было вращать вокруг оси, проходящей через центр рассеивающей фольги, и устанавливать таким образом под любым углом $\vartheta$. Весь прибор помещался в откачанный кожух, чтобы устранить рассеяние $\alpha$-частиц за счет столкновений с молекулами воздуха.

Оказалось, что некоторое количество $\alpha$-частиц рассеивается на очень большие углы (почти до 180°). Проанализировав результаты опыта, Резерфорд пришел к выводу, что столь сильное отклонение $\alpha$-частиц возможно только в том случае, если внутри атома имеется чрезвычайно сильное электрическое поле, которое создается зарядом, связанным с большой массой и сконцентрированным в очень малом объеме. Основываясь на этом выводе, Резерфорд предложил в 1911 г. ядерную модель атома. Согласно Резерфорду атом представляет собой систему зарядов, в центре которой расположено тяжелое положительное ядро с зарядом $Ze$, имеющее размеры, не превышающие $10^{-12}$ см, а вокруг ядра расположены $Z$ электронов, распределенных по всему объему, занимаемому атомом. Почти вся масса атома сосредоточена в ядре. Исходя из таких предположений, Резерфорд разработал количественную теорию рассеяния $\alpha$-частиц и вывел формулу для распределения рассеянных частиц по значениям угла $\vartheta$. При выводе формулы Резерфорд рассуждал следующим образом. Отклонения $\alpha$-частиц обусловлены воздействием на них со стороны атомных ядер. Заметного отклонения из-за взаимодействия с электронами не может быть, поскольку масса электрона на четыре порядка меньше массы $\alpha$-частицы. Когда частица пролетает вблизи ядра, на нее действует кулоновская сила отталкивания

$$F = \frac{2Ze^2}{r^2}. \tag{3.8}$$

В этом случае траектория частицы представляет собой гиперболу (см. § 3.13 кн. 1). Угол между асимптотами гиперболы обозначим буквой $\vartheta$ (рис. 3.5). Этот угол характеризует отклонение частицы от первоначального направления. Расстояние $b$ от ядра до первоначального направления полета $\alpha$-частицы называется **прицельным параметром**. Чем ближе пролетает частица от ядра

---

[6]) **Сцинтилляцией** называется вспышка света, производимая заряженными частицами при ударе их о вещество, способное люминесцировать.

(чем меньше $b$), тем, естественно, сильнее она отклоняется (тем больше $\vartheta$). Между величинами $b$ и $\vartheta$ имеется простое соотношение, которое мы сейчас установим.

Из закона сохранения энергии вытекает, что вдали от ядра модуль импульса $\mathbf{p}$ рассеянной частицы будет таким же, как и модуль импульса $\mathbf{p}_0$ до рассеяния: $p = p_0$. Следо-

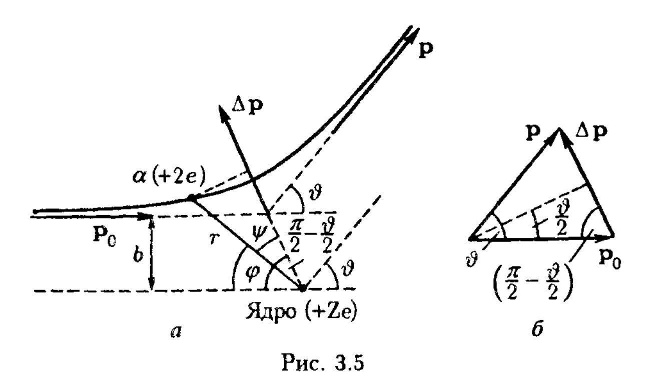



Рис. 3.5

вательно (см. рис. 3.5 *б*), для модуля приращения вектора импульса частицы, возникающего в результате рассеяния, можно написать выражение

$$|\Delta\mathbf{p}| = 2p_0 \sin\frac{\vartheta}{2} = 2m_\alpha v \sin\frac{\vartheta}{2}, \qquad (3.9)$$

где $m_\alpha$ — масса $\alpha$-частицы, $v$ — ее начальная скорость.

Вместе с тем согласно второму закону Ньютона

$$\Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F}\,dt.$$

Спроецировав фигурирующие в этом равенстве векторы на направление $\Delta\mathbf{p}$, получим

$$|\Delta\mathbf{p}| = \int F_{\Delta\mathbf{p}}\,dt. \qquad (3.10)$$

Из рис. 3.5 *а* видно, что проекция силы $\mathbf{F}$ на направление вектора $\Delta\mathbf{p}$ равна $F\cos\psi$. Угол $\psi$ можно выразить через полярный угол $\varphi$ и угол отклонения $\vartheta$:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} - \varphi.$$

Следовательно,

$$F_{\Delta\mathbf{p}} = F\cos\psi = F\sin\left(\varphi + \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{2Ze^2}{r^2}\sin\left(\varphi + \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Подставим это выражение в формулу (3.10), заменив одновременно $dt$ на $d\varphi/\dot{\varphi}$:

$$|\Delta \mathbf{p}| = 2Ze^2 \int\limits_0^{\pi-\vartheta} \frac{\sin(\varphi + \vartheta/2)\, d\varphi}{r^2\dot{\varphi}}. \tag{3.11}$$

Выражение $r^2\dot{\varphi}$ равно $M/m_\alpha$, где $M$ — модуль момента импульса $\alpha$-частицы, взятого относительно рассеивающего ядра (см. формулу (3.123) кн. 1). Сила, действующая на $\alpha$-частицу, является центральной. Поэтому момент импульса $M$ остается все время постоянным и равным своему первоначальному значению $M_0 = m_\alpha v b$. После замены $r^2\dot{\varphi}$ на $vb$ интеграл (3.11) легко вычисляется:

$$|\Delta \mathbf{p}| = \frac{2Ze^2}{vb} \int\limits_0^{\pi-\vartheta} \sin\left(\varphi + \frac{\vartheta}{2}\right) d\varphi = \frac{2Ze^2}{vb} \cdot 2\cos\frac{\vartheta}{2}. \tag{3.12}$$

Из сопоставления выражений (3.9) и (3.12) вытекает, что

$$2m_\alpha v \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{vb} \cdot 2\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{m_\alpha v^2}{2Ze^2} b. \tag{3.13}$$

Рассмотрим слой рассеивающего вещества, настолько тонкий, чтобы каждая частица при прохождении через него пролетала вблизи только одного ядра, т. е. чтобы каждая частица претерпевала лишь однократное рассеяние. Для того чтобы испытать рассеяние на угол, лежащий в пределах от $\vartheta$ до $\vartheta + d\vartheta$, частица должна пролететь вблизи одного из ядер по траектории, прицельный параметр которой заключен в пределах от $b$ до $b + db$ (рис. 3.6), причем $d\vartheta$ и $db$, как следует из (3.13), связаны соотношением

$$-\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} \frac{d\vartheta}{2} = \frac{m_\alpha v^2}{2Ze^2} db. \tag{3.14}$$

Знак минус в этом выражении обусловлен тем, что с увеличением $b$ (т. е. при $db > 0$) угол отклонения убывает

($d\vartheta < 0$). В дальнейшем нас будет интересовать лишь абсолютное значение $db$ в функции от $\vartheta$ и $d\vartheta$, поэтому знак минус мы не будем учитывать.

Обозначим площадь поперечного сечения пучка $\alpha$-частиц буквой $S$. Тогда число атомов рассеивающей фольги на пути пучка можно представить в виде $nSa$, где $n$ — число атомов в единице объема, $a$ — толщина фольги. Если $\alpha$-частицы распределены равномерно по сечению пучка и число их очень велико (что имеет место на самом деле), то

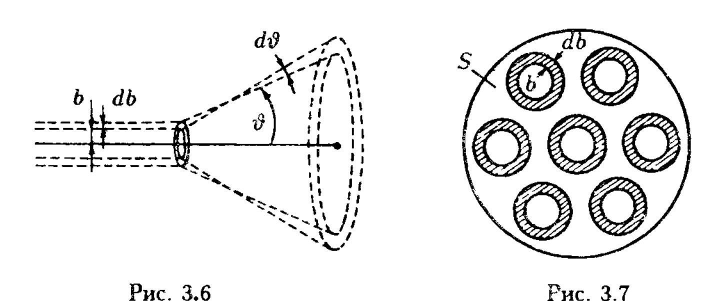



Рис. 3.6 Рис. 3.7

относительное число $\alpha$-частиц, пролетающих вблизи одного из ядер по траектории с прицельным параметром от $b$ до $b + db$ (и, следовательно, отклоняющихся в пределах углов от $\vartheta$ до $\vartheta + d\vartheta$), будет равно (рис. 3.7):

$$\frac{dN_\vartheta}{N} = \frac{nSa \cdot 2\pi b\, db}{S} = na \cdot 2\pi b\, db. \qquad (3.15)$$

В этом выражении $dN_\vartheta$ — поток частиц, рассеиваемых в пределах углов от $\vartheta$ до $\vartheta + d\vartheta$, $N$ — полный поток частиц в пучке.

Заменив в формуле (3.15) $b$ и $db$ на $\vartheta$ и $d\vartheta$ в соответствии с (3.13) и (3.14), получим

$$\frac{dN_\vartheta}{N} = na\left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \cdot 2\pi \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\frac{1}{2\sin^2(\vartheta/2)}\frac{d\vartheta}{2}.$$

Преобразуем множители, содержащие угол $\vartheta$:

$$\frac{\operatorname{ctg}(\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\cos(\vartheta/2)\sin(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)} = \frac{\sin\vartheta}{2\sin^4(\vartheta/2)}.$$

С учетом этого преобразования получим

$$\frac{dN_\vartheta}{N} = na\left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta}{4\sin^4(\vartheta/2)}.$$

Выражение $2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$ дает телесный угол $d\Omega$, в пределах которого заключены направления, соответствующие углам рассеяния от $\vartheta$ до $\vartheta + d\vartheta$. Поэтому можно написать

$$\frac{dN_\vartheta}{N} = na \left(\frac{Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}. \qquad (3.16)$$

Мы получили формулу Резерфорда для рассеяния $\alpha$-частиц. В 1913 г. сотрудники Резерфорда произвели проверку этой формулы путем подсчета сцинтилляций, наблюдавшихся под разными углами $\vartheta$ за одинаковые промежутки времени. В условиях опыта (см. рис. 3.4) счету подвергались $\alpha$-частицы, заключенные в пределах одного и того же телесного угла (определявшегося площадью экрана Э и расстоянием его от фольги), поэтому число сцинтилляций, наблюдавшихся под разными углами, должно было быть, в соответствии с формулой Резерфорда, пропорционально $1/\sin^4(\vartheta/2)$. Этот результат теории хорошо подтвердился на опыте. Зависимость рассеяния от толщины фольги и скорости $\alpha$-частиц также оказалась в соответствии с формулой (3.16).

Справедливость теории, исходящей из кулоновского взаимодействия между $\alpha$-частицей и ядром атома, свидетельствует о том, что даже отбрасываемая в обратном направлении $\alpha$-частица не проникает в область положительного заряда атома. Вместе с тем летящая точно по направлению к ядру $\alpha$-частица подошла бы к его центру на расстояние, которое можно определить, приравняв кинетическую энергию $\alpha$-частицы потенциальной энергии взаимодействия $\alpha$-частицы с ядром в момент полной остановки частицы:

$$\frac{m_\alpha v^2}{2} = \frac{2Ze^2}{r_{\min}}$$

($r_{\min}$ — минимальное расстояние между центрами $\alpha$-частицы и ядра). Положив $Z = 47$ (серебро), $v = 10^9$ см/с и $m_\alpha = 4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 6,6 \cdot 10^{-24}$ г, получим

$$r_{\min} = \frac{4Ze^2}{m_\alpha v^2} = \frac{4 \cdot 47 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}{6,6 \cdot 10^{-24} \cdot 10^{18}} \text{ см} \approx 6 \cdot 10^{-12} \text{ см}.$$

Итак, результаты опытов по рассеянию $\alpha$-частиц свидетельствуют в пользу ядерной модели атома, предложенной Резерфордом. Однако ядерная модель оказалась в про-

тиворечии с законами классической механики и электродинамики. Поскольку система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом состоянии, Резерфорду пришлось отказаться от статической модели атома и предположить, что электроны движутся вокруг ядра, описывая искривленные траектории. Но в этом случае электрон будет двигаться с ускорением, в связи с чем согласно классической электродинамике он должен непрерывно излучать электромагнитные (световые) волны. Процесс излучения сопровождается потерей энергии, так что электрон должен в конечном счете упасть на ядро (рис. 3.8).

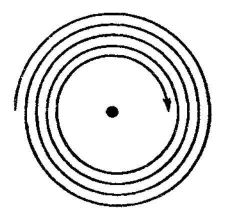


Рис. 3.8

## 3.4. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца

В предыдущем параграфе было выяснено, что ядерная модель атома в сочетании с классической механикой и электродинамикой оказалась неспособной объяснить ни устойчивость атома, ни характер атомного спектра. Выход из создавшегося тупика был найден в 1913 г. Бором [7]), правда, ценой введения предположений, противоречащих классическим представлениям. Допущения,сделанные Бором, содержатся в двух высказанных им постулатах.

1. Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются в действительности только некоторые дискретные орбиты, удовлетворяющие определенным квантовым условиям. Электрон, находящийся на одной из этих орбит, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает электромагнитных волн (света).

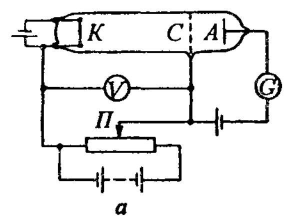
2. Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта энергии $\hbar\omega$ при переходе электрона из одного стационарного (устойчивого) состояния в другое. Величина светового кванта равна разности энергий тех стационарных состояний, между которыми совершается квантовый скачок электрона:

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \qquad (3.17)$$

Существование дискретных энергетических уровней атома подтверждается опытами, осуществленными в 1914 г.

[7]) Нильс Хендрик Давид Бор (1885–1962) — датский физик.

Франком и Герцем [8]). Схема их установки приведена на рис. 3.9*а*. В трубке, заполненной парами ртути под небольшим давлением (~1 мм рт. ст.), имелись три электрода: катод $K$, сетка $C$ и анод $A$. Электроны, вылетавшие из катода вследствие термоэлектронной эмиссии, ускорялись разностью потенциалов $U$, приложенной между катодом и сеткой. Эту разность потенциалов можно было плавно менять с помощью потенциометра $\Pi$. Между сеткой и анодом создавалось слабое электрическое поле



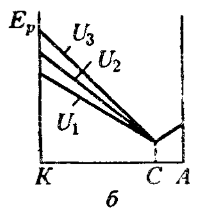




Рис. 3.9

(разность потенциалов порядка 0,5 В), тормозившее движение электронов к аноду. На рис. 3.9*б* показано изменение потенциальной энергии электрона $E_p = -e\varphi$ в зазоре между электродами при различных значениях напряжения $U$ между катодом и сеткой ($\varphi$ — потенциал в соответствующей точке поля). Исследовалась зависимость силы тока $I$ в цепи анода от напряжения $U$ между катодом и сеткой. Сила тока измерялась гальванометром $G$, напряжение — вольтметром $V$. Полученные результаты представлены на рис. 3.10. Видно, что сила тока вначале монотонно возрастала, достигая максимума при $U = 4,9$ В, после чего с дальнейшим увеличением $U$ резко падала, достигая минимума, и снова начинала расти. Максимумы силы тока повторялись при $U$, равном 9,8; 14,7 В и т. д. [9])

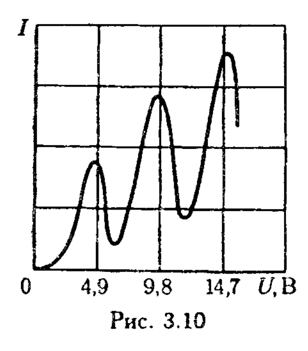



Рис. 3.10

[8]) Джеймс Франк (1882–1964) — немецкий физик; Густав Людвиг Герц (1887–1975) — немецкий физик.

[9]) Практически максимумы получались при напряжениях 4,1; 9,0; 13,9 В и т. д., что обусловлено наличием контактной разности потенциалов между электродами порядка 0,8 В.

Такой ход кривой объясняется тем, что вследствие дискретности энергетических уровней атомы могут воспринимать энергию только порциями:

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1 \quad \text{либо} \quad \Delta E_2 = E_3 - E_1 \quad \text{и т. д.},$$

где $E_1$, $E_2$, $E_3$, ... — энергия 1-го, 2-го, 3-го и т. д. стационарных состояний.

До тех пор, пока энергия электрона меньше $\Delta E_1$, соударения между электроном и атомом ртути носят упругий характер, причем, поскольку масса электрона во много раз меньше массы атома ртути, энергия электрона при столкновениях практически не изменяется. Часть электронов попадает на сетку, остальные же, проскочив через сетку, достигают анода, создавая ток в цепи гальванометра $G$. Чем больше скорость, с которой электроны достигают сетки (чем больше $U$), тем больше доля электронов, проскочивших через сетку, и тем, следовательно, больше сила тока $I$.

Когда энергия, накапливаемая электроном в промежутке катод — сетка, достигает значения $\Delta E_1$, соударения перестают быть упругими — электроны при ударах об атомы передают им энергию $\Delta E_1$ и продолжают затем двигаться с меньшей скоростью. Поэтому число электронов, достигающих анода, уменьшается. Например, при $U = 5{,}3$ В электрон сообщает атому энергию, соответствующую 4,9 В (первый потенциал возбуждения атома ртути), и продолжает двигаться с энергией 0,4 эВ. Если даже такой электрон окажется между сеткой и анодом, он не сможет преодолеть задерживающее напряжение 0,5 В и будет возвращен обратно на сетку.

Атомы, получившие при соударении с электронами энергию $\Delta E_1$, переходят в возбужденное состояние, из которого они спустя время порядка $10^{-8}$ с возвращаются в основное состояние, излучая фотон с частотой $\omega = \Delta E_1/\hbar$.

При напряжении, превышающем 9,8 В, электрон на пути катод — анод может дважды претерпеть неупругое соударение с атомами ртути, теряя при этом энергию 9,8 эВ, вследствие чего сила тока $I$ снова начнет уменьшаться. При еще большем напряжении возможны трехкратные неупругие соударения электронов с атомами, что приводит к возникновению максимума при $U = 14{,}7$ В, и т. д.

При достаточном разрежении паров ртути и соответствующем ускоряющем напряжении электроны за время до столкновения с атомами могут приобретать скорость, достаточную для перевода атома в состояние с энергией

$E_3$. В этом случае на кривой $I = f(U)$ наблюдаются максимумы при напряжениях, кратных второму потенциалу возбуждения атома (для ртути этот потенциал равен 6,7 В), или при напряжениях, равных сумме первого и второго потенциалов возбуждения, и т. д.

Таким образом, в опытах Франка и Герца непосредственно обнаруживается существование у атомов дискретных энергетических уровней.

В спектроскопии частоты спектральных линий принято представлять в виде разности положительных чисел $T(n)$, называемых термами (см. предпоследний абзац § 3.1). Например, в случае водорода $T(n) = R/n^2$. Соответственно частота фотона, излучаемого при переходе из состояния $n$ в состояние $m$, определяется формулой

$$\omega_{nm} = T(m) - T(n) = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2} \quad (n > m) \qquad (3.18)$$

(см. формулу (3.4)). Согласно второму постулату Бора

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \left(-\frac{E_m}{\hbar}\right) - \left(-\frac{E_n}{\hbar}\right)$$

(напомним, что энергии связанных состояний электрона отрицательны, так что выражения в круглых скобках больше нуля). Сопоставление с формулой (3.18) дает, что

$$T(n) = -\frac{E_n}{\hbar}. \qquad (3.19)$$

Таким образом, терм тесно связан с энергией стационарного состояния атома, отличаясь от нее лишь множителем $(-1/\hbar)$.

## 3.5. Правило квантования круговых орбит

Условие для стационарных орбит Бор получил, исходя из постулата Планка, согласно которому осуществляются только такие состояния гармонического осциллятора, энергия которых равна

$$E_n = n\hbar\omega \quad (n \text{ — целое число}). \qquad (3.20)$$

Обозначим координату осциллятора буквой $q$, а импульс — буквой $p$. Полная энергия осциллятора определяется выражением

$$E_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = n\hbar\omega.$$

Отсюда

$$\frac{q^2}{2n\hbar/m\omega} + \frac{p^2}{2mn\hbar\omega} = 1. \qquad (3.21)$$

Координатную плоскость $qp$ называют **фазовой плоскостью**, а кривую на этой плоскости, определяющую для данного движения $p$ как функцию $q$, — **фазовой траекторией**. Из (3.21) следует, что фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс (рис. 3.11). Полуоси эллипса равны

$$a = \sqrt{2n\hbar/m\omega}, \quad b = \sqrt{2mn\hbar\omega}.$$

Площадь эллипса равна произведению полуосей, умноженному на $\pi$:

$$S_n = \pi ab = 2\pi\hbar n. \qquad (3.22)$$

Вместе с тем площадь можно представить в виде

$$S_n = \oint p\,dq \qquad (3.23)$$

(при интегрировании совершается обход по всему эллипсу; см. рис. 3.11).

Из сравнения выражений (3.22) и (3.23) вытекает правило квантования:

$$\oint p\,dq = 2\pi\hbar n. \qquad (3.24)$$

Полученное для гармонического осциллятора правило (3.24) Бор распространил и на другие механические си-

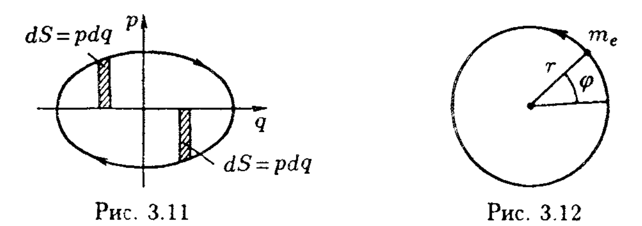



Рис. 3.11 Рис. 3.12

стемы. В случае осциллятора $q = x$, $p = m\dot{x}$. Для других систем под $q$ понимают обобщенную координату [10]), а под $p$ — обобщенный импульс.

[10]) **Обобщенными координатами** называются любые величины, с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве.

Для электрона, движущегося вокруг ядра по круговой орбите, естественно взять в качестве обобщенной координаты азимутальный угол $\varphi$ (рис. 3.12). Обобщенной скоростью в этом случае будет $\dot{\varphi}$. Мы знаем, что при вращательном движении роль линейной скорости переходит к угловой скорости $\dot{\varphi}$, а роль массы — к моменту инерции $m_e r^2$ ($m_e$ — масса электрона). Соответственно обобщенный импульс равен $m_e r^2 \dot{\varphi} = m_e v r$. Последнее выражение определяет момент обычного импульса $M$, взятый относительно ядра. Таким образом, для электрона, движущегося по круговой орбите, условие (3.24) имеет вид

$$\oint M\,d\varphi = 2\pi\hbar n. \tag{3.25}$$

Сила, с которой ядро действует на электрон, является центральной. Поэтому $M = \text{const}$ и левая часть соотношения (3.25) равна $2\pi M$. Следовательно, мы приходим к условию

$$M = n\hbar. \tag{3.26}$$

Итак, согласно условию Бора из всех орбит электрона, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются только те, для которых момент импульса равен целому кратному постоянной Планка $\hbar$.

## 3.6. Элементарная боровская теория водородного атома

Согласно (3.26) возможны только такие орбиты, для которых момент импульса электрона $m_e v r$ удовлетворяет условию

$$m_e v r = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.27}$$

Число $n$ называется главным квантовым числом.

Рассмотрим электрон, движущийся в поле атомного ядра с зарядом $Ze$. При $Z = 1$ такая система соответствует атому водорода, при иных $Z$ — водородоподобному иону, т. е. атому с порядковым номером $Z$, из которого удалены все электроны, кроме одного. Уравнение движения электрона имеет вид

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}. \tag{3.28}$$

Исключив $v$ из уравнений (3.27) и (3.28), получим выражение для радиусов допустимых орбит:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e Z e^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.29}$$

Радиус первой орбиты водородного атома называется **боровским радиусом**[11]. Его значение равно

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529\ \text{Å}. \tag{3.30}$$

Отметим, что боровский радиус имеет значение порядка газокинетических размеров атома.

Внутренняя энергия атома слагается из кинетической энергии электрона (ядро неподвижно) и энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Из (3.28) следует, что

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{Ze^2}{2r}.$$

Следовательно,

$$E = \frac{Ze^2}{2r} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Подставив сюда выражение (3.29) для $r$, найдем дозволенные значения внутренней энергии атома:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.31}$$

Схема энергетических уровней, определяемых формулой (3.31), дана на рис. 3.13.

При переходе атома водорода ($Z = 1$) из состояния $n$ в состояние $m$ излучается фотон

$$\hbar\omega = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

---

[11]) Боровский радиус принято обозначать символом $r_0$ или $a_0$ вместо $r_1$.

Частота испущенного света равна

$$\omega = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Мы пришли к обобщенной формуле Бальмера (см (3.4)), причем для постоянной Ридберга получилось значение

$$R = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3}. \tag{3.32}$$

При подстановке в это выражение числовых значений $m_e$, $e$ и $\hbar$ получается значение $R$, поразительно хорошо согласующееся с экспериментальным значением постоянной Ридберга.

Теория Бора была крупным шагом в развитии теории атома. Она с полной отчетливостью показала неприменимость классической физики к внутриатомным явлениям и главенствующее значение квантовых законов в микромире.

$E=0$

$E_3$

$E_2$

$E_1$

Рис. 3.13

В настоящее время теория Бора имеет преимущественно историческое значение. После первых успехов теории все яснее давали себя знать ее недочеты. Особенно тягостной была неудача всех попыток построения теории атома гелия — одного из простейших атомов, непосредственно следующего за атомом водорода.

Самой слабой стороной теории Бора, обусловившей последующие неудачи, была ее внутренняя логическая противоречивость: она не была ни последовательно классической, ни последовательно квантовой теорией. После открытия волновых свойств вещества стало совершенно ясно, что теория Бора, опирающаяся на классическую механику, могла быть только переходным этапом на пути к созданию последовательной теории атомных явлений.

Глава 4

# Элементы квантовой механики

## 4.1. Гипотеза де Бройля. Волновые свойства вещества

Недостаточность теории Бора указывала на необходимость пересмотра основ квантовой теории и представлений о природе микрочастиц (электронов, протонов и т. п.). Возник вопрос о том, насколько исчерпывающим является представление электрона в виде малой механической частицы, характеризуемой определенными координатами и определенной скоростью.

В результате углубления представлений о природе света выяснилось, что в оптических явлениях обнаруживается своеобразный дуализм. Наряду с такими свойствами света, которые самым непосредственным образом свидетельствуют о его волновой природе (интерференция, дифракция), имеются и другие свойства, столь же непосредственно обнаруживающие его корпускулярную природу (фотоэффект, явление Комптона).

В 1924 г. де Бройль[1]) выдвинул смелую гипотезу, что дуализм не является особенностью одних только оптических явлений, но имеет универсальное значение. «В оптике, — писал он, — в течение столетия слишком пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым; не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?». Допуская, что частицы вещества наряду с корпускулярными свойствами имеют также и волновые, де Бройль перенес на случай частиц вещества те же правила перехода от одной картины к другой, какие справедливы в случае света. Фотон обладает энергией

$$E = \hbar\omega$$

и импульсом

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

---

[1]) Луи де Бройль (1892-1987) — французский физик.

По идее де Бройля движение электрона или какой-либо другой частицы связано с волновым процессом, длина волны которого равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \tag{4.1}$$

а частота

$$\omega = \frac{E}{\hbar}. \tag{4.2}$$

Гипотеза де Бройля вскоре была подтверждена экспериментально. Дэвиссон[2]) и Джермер[3]) исследовали в 1927 г. отражение электронов от монокристалла никеля, принадлежащего к кубической системе. Узкий пучок моноэнергетических электронов направлялся на поверхность монокристалла, сошлифованную перпендикулярно к большой диагонали кристаллической ячейки (параллельные этой поверхности кристаллические плоскости обозначаются в кристаллографии индексами (111); см. § 6.1). Отраженные электроны улавливались цилиндрическим электродом, присоединенным к гальванометру (рис. 4.1). Интенсивность отраженного пучка оценивалась по силе тока, текущего через гальванометр. Варьировались скорость электронов и угол $\varphi$. На рис. 4.2 показана зависимость силы тока, измеряемой гальванометром, от угла $\varphi$ при различных энергиях электронов. Вертикальная ось на графиках определяет направление падающего пучка.

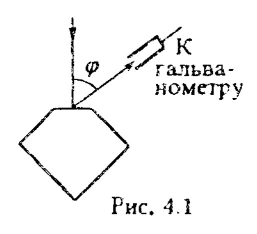


Рис. 4.1

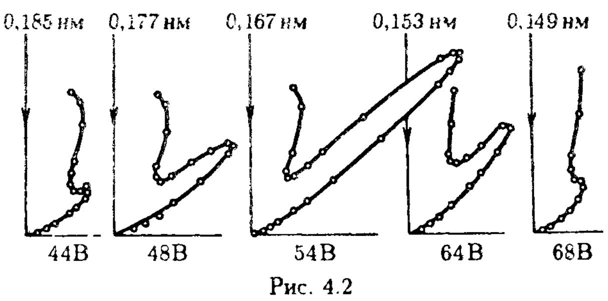


Рис. 4.2

[2]) Клинтон Джозеф Дэвиссон (1881–1958) — американский физик.
[3]) Лестер Халберт Джермер (1896–1971) — американский физик.

Сила тока в заданном направлении представляется длиной отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с кривой. Из рисунка видно, что рассеяние оказалось особенно интенсивным при определенном значении угла $\varphi$. Этот угол соответствовал отражению от атомных плоскостей, расстояние между которыми $d$ было известно из рентгенографических исследований. При данном $\varphi$ сила тока оказалась особенно значительной при ускоряющем напряжении, равном 54 В. Вычисленная по формуле (4.1) длина волны, отвечающая этому напряжению, равна 0,167 нм. Брэгговская длина волны, отвечающая условию[4])

$$2d\sin\vartheta = n\lambda,$$

равнялась 0,165 нм. Совпадение настолько разительно, что опыты Дэвиссона и Джермера следует признать блестящим подтверждением идеи де Бройля.

В 1927 г. Дж.П. Томсон[5]) и независимо от него Тартаковский[6]) получили дифракционную картину при прохождении электронного пучка через металлическую фольгу. Опыт осуществлялся следующим образом (рис. 4.3). Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов порядка нескольких десятков киловольт, проходил через тонкую металлическую фольгу и попадал на фотопластинку. Электрон при ударе о фотопластинку оказывает на нее такое же действие, как и фотон. Полученная таким способом электронограмма золота (рис. 4.4 *а*) сопо-

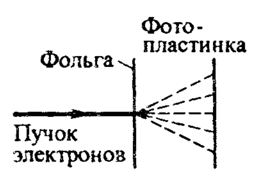
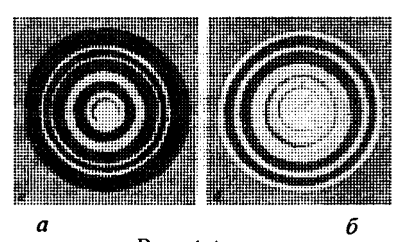


Рис. 4.3


*а* *б*
Рис. 4.4

[4]) Угол скольжения $\vartheta$ связан с углом $\varphi$ соотношением $\vartheta = \pi/2 - \varphi/2$.

[5]) Джордж Паджет Томсон (1892–1975), сын Дж.Дж. Томсона, — английский физик.

[6]) П.С. Тартаковский (1895–1939) — советский физик.

ставлена с полученной в аналогичных условиях рентгенограммой алюминия (рис. 4.4 *б*). Сходство обеих картин поразительно. Штерн и его сотрудники показали, что дифракционные явления обнаруживаются также у атомных и молекулярных пучков. Во всех перечисленных случаях дифракционная картина соответствует длине волны, определяемой соотношением (4.1).

## 4.2. Необычные свойства микрочастиц

Микрочастицами называют элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны, фотоны и другие простые частицы), а также сложные частицы, образованные из сравнительно небольшого числа элементарных частиц (молекулы, атомы, ядра атомов и т. п.).

Термин «микрочастица» отражает только одну сторону объекта, к которому он применяется. Всякий микрообъект (молекула, атом, электрон, фотон и т. д.) представляет собой образование особого рода, сочетающее в себе свойства и частицы, и волны. Может быть, правильнее было бы называть его «частицей-волной».

Микрообъект не способен воздействовать непосредственно на наши органы чувств — ни видеть, ни осязать его нельзя. Ничего подобного микрообъектам в воспринимаемом нами мире не существует. Микротела «не похожи ни на что из того, что вам хоть когда-нибудь приходилось видеть»[7]).

«Раз поведение атомов так непохоже на наш обыденный опыт, то к нему очень трудно привыкнуть. И новичку в науке, и опытному физику — всем оно кажется своеобразным и туманным. Даже большие ученые не понимают его настолько, как им хотелось бы, и это совершенно естественно, потому что весь непосредственный опыт человека, вся его интуиция — все прилагается к крупным телам. Мы знаем, что будет с большим предметом; но именно так мельчайшие тельца не поступают. Поэтому, изучая их, приходится прибегать к различного рода абстракциям, напрягать воображение и не пытаться связывать их с нашим непосредственным опытом».

В доквантовой физике «понять» означало составить себе наглядный образ объекта или процесса. Квантовую

---

[7]) Эта и последующие фразы в данном параграфе, взятые в кавычки, заимствованы из «Фейнмановских лекций по физике», вып. 3, гл. 37 (М.: Мир, 1965).

физику нельзя понять в таком смысле слова. Всякая наглядная модель неизбежно будет действовать по классическим законам и поэтому непригодна для представления квантовых процессов. Поэтому самое правильное, что можно сделать, — это отказаться от попыток строить наглядные модели поведения квантовых объектов. Отсутствие наглядности поначалу может вызвать чувство неудовлетворенности, но со временем это чувство проходит, и все становится на свои места.

Сочетая в себе свойства частицы и волны, микротела «не ведут себя ни как волны, ни как частицы...». Отличие микрочастицы от волны заключается в том, что она всегда обнаруживается как неделимое целое. Никто никогда не наблюдал, например, полэлектрона. В то же время волну можно разделить на части (например, направив световую волну на полупрозрачное зеркало) и воспринимать затем каждую часть в отдельности. Отличие микрочастицы от привычной нам макрочастицы заключается в том, что она не обладает одновременно определенными значениями координаты и импульса, вследствие чего понятие траектории применительно к микрочастице утрачивает смысл.

Своеобразие свойств микрочастиц отчетливее всего обнаруживается в следующем мысленном эксперименте[8]). Направим на преграду с двумя узкими щелями параллельный пучок моноэнергетических (т. е. обладающих одина-

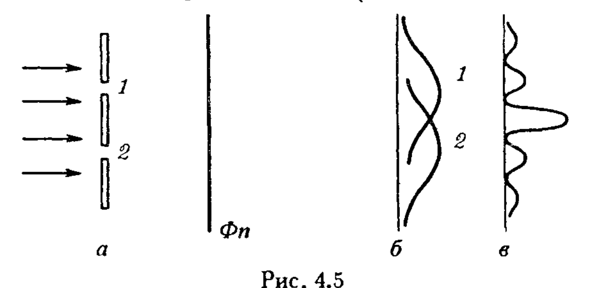


Рис. 4.5

ковой кинетической энергией) электронов (рис. 4.5 *а*). За преградой поставим фотопластинку *Фп*. Вначале закроем

[8]) В мысленном эксперименте изучаемая сторона явления обнаруживается в наиболее простом и отчетливом виде. Достоверность наблюдаемого в мысленном эксперименте эффекта вытекает из наблюдений, полученных в ряде реальных экспериментов. В данном случае такими экспериментами являются описанные в предыдущем параграфе опыты по дифракции электронов.

вторую щель и произведем экспонирование в течение времени $\tau$. Почернение на обработанной фотопластинке будет характеризоваться кривой *1* на рис. 4.5 *б*. Вторую фотопластинку подвергнем экспозиции в течение того же времени $\tau$, закрыв первую щель. Характер почернения передается в этом случае кривой *2* на рис 4.5 *б*. Наконец, откроем обе щели и подвергнем экспонированию в течение времени $\tau$ третью пластинку. Картина почернения, получающаяся в последнем случае, изображена на рис. 4.5 *в*. Эта картина отнюдь не эквивалентна наложению первых двух картин. Она оказывается аналогичной картине, получающейся при интерференции двух когерентных световых волн. Характер картины свидетельствует о том, что на движение каждого электрона оказывают влияние оба отверстия. Такой вывод несовместим с представлениями о траекториях. Если бы электрон в каждый момент времени находился в определенной точке пространства и двигался по траектории, он проходил бы через определенное отверстие — первое или второе. Явление же дифракции доказывает, что в прохождении каждого электрона участвуют оба отверстия — и первое, и второе.

Не следует, однако, представлять дело так, что какая-то часть электрона проходит через одно отверстие, а другая часть — через второе. Мы уже отмечали, что электрон, как и другие микрочастицы, всегда обнаруживается как целое с присущей ему массой, зарядом и другими характерными для него величинами. Таким образом, электрон, протон, атомное ядро представляют собой частицы с весьма своеобразными свойствами. Обычный шарик, даже и очень малых размеров (макроскопическая частица), не может служить прообразом микрочастицы. С уменьшением размеров начинают проявляться качественно новые свойства, не обнаруживающиеся у макрочастиц.

В ряде случаев утверждение об отсутствии траекторий у микрочастиц, казалось бы, противоречит опытным фактам. Так, например, в камере Вильсона путь, по которому движется микрочастица, обнаруживается в виде узких следов (треков), образованных капельками тумана; движение электронов в электроннолучевой трубке превосходно рассчитывается по классическим законам, и т. п. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что при известных условиях понятие траектории оказывается применимым к микрочастицам, но только с определенной степенью точности. Положение оказывается точно таким, как и в оптике. Если размеры преград или отверстий велики по сравне-

нию с длиной волны, распространение света происходит как бы вдоль определенных лучей (траекторий). При определенных условиях понятие траектории оказывается приближенно применимым к движению микрочастиц, подобно тому как оказывается справедливым закон прямолинейного распространения света.

## 4.3. Принцип неопределенности

В классической механике состояние материальной точки (классической частицы) определяется заданием значений координат, импульса, энергии и т. д. Перечисленные величины называются **динамическими переменными**. Строго говоря, микрообъекту не могут быть приписаны указанные динамические переменные. Однако информацию о микрочастицах мы получаем, наблюдая их взаимодействие с приборами, представляющими собой макроскопические тела. Поэтому результаты измерений поневоле выражаются в терминах, разработанных для характеристики макротел, т. е. через значения динамических переменных. В соответствии с этим измеренные значения динамических переменных приписываются микрочастицам. Например, говорят о состоянии электрона, в котором он имеет такое-то значение энергии, и т. д.

Своеобразие свойств микрочастиц проявляется в том, что не для всех переменных получаются при измерениях определенные значения. Так, например, электрон (и любая другая микрочастица) не может иметь одновременно точных значений координаты $x$ и компоненты импульса $p_x$. Неопределенности значений $x$ и $p_x$ удовлетворяют соотношению

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \tag{4.3}$$

($\hbar$ — постоянная Планка). Из (4.3) следует, что чем меньше неопределенность одной из переменных ($x$ или $p_x$), тем больше неопределенность другой. Возможно такое состояние, в котором одна из переменных имеет точное значение, а другая переменная при этом оказывается совершенно неопределенной (ее неопределенность равна бесконечности).

Соотношение, аналогичное (4.3), имеет место для $y$ и $p_y$, для $z$ и $p_z$, а также для ряда других пар величин (в классической механике такие пары величин называются

канонически сопряженными). Обозначив канонически сопряженные величины буквами $A$ и $B$, можно написать

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar/2. \tag{4.4}$$

Соотношение (4.4) называется **соотношением неопределенностей** для величин $A$ и $B$. Это соотношение открыл Гейзенберг[9]) в 1927 г.

Утверждение о том, что *произведение неопределенностей значений двух сопряженных переменных не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка* $\hbar$, называется **принципом неопределенности Гейзенберга**.

Энергия и время являются канонически сопряженными величинами. Поэтому для них также справедливо соотношение неопределенностей:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2. \tag{4.5}$$

Это соотношение означает, что определение энергии с точностью $\Delta E$ должно занять интервал времени, равный по меньшей мере $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$.

Соотношение (4.3) было установлено из рассмотрения, в частности, следующего примера. Попытаемся определить значение координаты свободно летящей микрочастицы, поставив на ее пути щель ширины $\Delta x$, расположен-

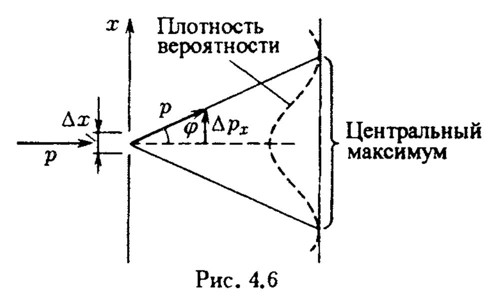



Рис. 4.6

ную перпендикулярно к направлению движения частицы (рис. 4.6). До прохождения частицы через щель ее составляющая импульса $p_x$ имеет точное значение, равное нулю (щель по условию перпендикулярна к импульсу), так что $\Delta p_x = 0$, зато координата $x$ частицы является совершенно неопределенной. В момент прохождения частицы

[9]) Вернер Гейзенберг (1901–1976) — немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

через щель положение меняется. Вместо полной неопределенности координаты $x$ появляется неопределенность $\Delta x$, но это достигается ценой утраты определенности значения $p_x$. Действительно, вследствие дифракции имеется некоторая вероятность того, что частица будет двигаться в пределах угла $2\varphi$, где $\varphi$ — угол, соответствующий первому дифракционному минимуму (максимумами высших порядков можно пренебречь, поскольку их интенсивность мала по сравнению с интенсивностью центрального максимума). Таким образом, появляется неопределенность:

$$\Delta p_x = p \sin \varphi.$$

Краю центрального дифракционного максимума (первому минимуму), получающемуся от щели ширины $\Delta x$, соответствует угол $\varphi$, для которого

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

(см. формулу (5.25) кн. 4). Следовательно,

$$\Delta p_x \sim p \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

Отсюда с учетом (4.1) получается соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim p\lambda = 2\pi\hbar,$$

согласующееся с (4.3).

Иногда соотношение неопределенностей получает следующее толкование: в действительности у микрочастицы имеются точные значения координат и импульсов, однако ощутимое для такой частицы воздействие измерительного прибора не позволяет точно определить эти значения. Такое толкование является совершенно неправильным. Оно противоречит наблюдаемым на опыте явлениям дифракции микрочастиц.

Соотношение неопределенностей указывает, в какой мере можно пользоваться понятиями классической механики применительно к микрочастицам, в частности, с какой степенью точности можно говорить о траекториях микрочастиц. Движение по траектории характеризуется вполне определенными значениями координат и скорости в каждый момент времени. Подставив в (4.3) вместо $p_x$ произведение $mv_x$, получим соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \hbar/2m.$$

Мы видим, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью применимо понятие траектории. Уже для макрочастицы размеры всего 1 мкм неопределенности значений $x$ и $v_x$ оказываются за пределами точности измерения этих величин, так что практически ее движение будет неотличимо от движения по траектории.

При определенных условиях даже движение микрочастицы может приближенно рассматриваться как происходящее по траектории. В качестве примера рассмотрим движение электрона в электронно-лучевой трубке. Оценим неопределенности координаты и импульса электрона для этого случая. Пусть след электронного пучка на экране имеет радиус $r$ порядка $10^{-3}$ см, длина трубки $l$ порядка 10 см (рис. 4.7). Тогда $\Delta p_x/p_x \sim 10^{-4}$. Импульс электрона связан с ускоряющим напряжением $U$ соотношением

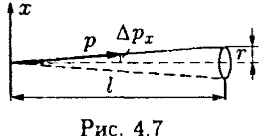


Рис. 4.7

$$\frac{p^2}{2m} = eU.$$

Отсюда $p = \sqrt{2meU}$. При напряжении $U \sim 10^4$ В энергия электрона равна $10^4$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ эрг. Оценим импульс:

$$p = \sqrt{2 \cdot 0,91 \cdot 10^{-27} \cdot 1,6 \cdot 10^{-8}} \approx 5 \cdot 10^{-18} \text{ г·см/с}.$$

Следовательно, $\Delta p_x \approx 5 \cdot 10^{-18} \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-22}$г·см/с И, наконец, согласно соотношению (4.3)

$$\Delta x = \frac{\hbar/2}{\Delta p_x} \approx \frac{1,05 \cdot 10^{-27}/2}{5 \cdot 10^{-22}} \text{ см} \sim 10^{-6} \text{ см}.$$

Полученный результат указывает на то, что движение электрона в электронно-лучевой трубке практически неотличимо от движения по траектории.

Соотношение неопределенностей является одним из фундаментальных положений квантовой механики. Одного этого соотношения достаточно, чтобы получить ряд важных результатов. В частности, оно позволяет объяснить тот факт, что электрон не падает на ядро атома, а также оценить размеры простейшего атома и минимальную возможную энергию электрона в таком атоме.

Если бы электрон упал на точечное ядро, его координаты и импульс приняли бы определенные (нулевые) значения, что несовместимо с принципом неопределенности. Этот принцип требует, чтобы неопределенность координаты электрона $\Delta r$ и неопределенность импульса $\Delta p$ были связаны условием (4.3). Формально энергия была бы минимальна при $r = 0$ и $p = 0$. Поэтому, производя оценку наименьшей возможной энергии, нужно положить $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$. Подставив эти значения в (4.3), получим соотношение

$$rp = \hbar \tag{4.6}$$

(поскольку наши выкладки могут претендовать лишь на то, чтобы дать порядки вычисляемых величин, 1/2 в правой части мы опустили).

Энергия электрона в атоме водорода равна

$$E = p^2/(2m) - e^2/r.$$

Заменив согласно (4.6) $p$ на $\hbar/r$, получим, что

$$E = \hbar^2/(2mr^2) - e^2/r. \tag{4.7}$$

Найдем значение $r$, при котором $E$ минимальна. Продифференцировав выражение (4.7) по $r$ и приравняв производную нулю, придем к уравнению

$$-\hbar^2/(mr^3) + e^2/r^2 = 0,$$

из которого следует, что

$$r = \hbar^2/(me^2). \tag{4.8}$$

Полученное нами значение совпадает с радиусом первой боровской орбиты водородного атома (см. формулу (3.30)). Подстановка выражения (4.8) в формулу (4.7) дает энергию основного состояния:

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^2 - e^2\frac{me^2}{\hbar^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

Найденное значение также совпадает с энергией первого боровского уровня для $Z = 1$ (см. формулу (3.31)).

То обстоятельство, что мы получили точные значения $r$ и $E$, является, конечно, просто удачей. Приведенный нами расчет может претендовать лишь на то, чтобы дать оценку порядка величин $r$ и $E$.

## 4.4. Уравнение Шрёдингера

В развитие идеи де Бройля о волновых свойствах вещества Шрёдингер[10]) получил в 1926 г. свое знаменитое уравнение. Шрёдингер сопоставил движению микрочастицы комплексную функцию координат и времени, которую он назвал волновой функцией и обозначил греческой буквой «пси» ($\psi$ или $\Psi$). Мы будем называть ее пси-функцией.

Пси-функция характеризует состояние микрочастицы. Вид функции получается из решения уравнения Шрёдингера, которое выглядит следующим образом:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{4.9}$$

Здесь $m$ — масса частицы, $i$ — мнимая единица, $\nabla^2$ — оператор Лапласа, результат действия которого на некоторую функцию представляет собой сумму вторых частных производных по координатам:

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \tag{4.10}$$

Буквой $U$ в уравнении (4.9) обозначена функция координат и времени, градиент которой, взятый с обратным знаком, определяет силу, действующую на частицу. В случае, когда функция $U$ не зависит явно от времени, она имеет смысл потенциальной энергии частицы.

Из уравнения (4.9) следует, что вид пси-функции определяется функцией $U$, т. е. в конечном счете характером сил, действующих на частицу.

Уравнение Шрёдингера является основным уравнением нерелятивистской квантовой механики. Оно не может быть выведено из других соотношений. Его следует рассматривать как исходное основное предположение, справедливость которого доказывается тем, что все вытекающие из него следствия самым точным образом согласуются с опытными фактами.

Шрёдингер установил свое уравнение, исходя из оптико-механической аналогии. Эта аналогия заключается в сходстве уравнений, описывающих ход световых лучей, с

[10]) Эрвин Шрёдингер (1887-1961) — австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

уравнениями, определяющими траектории частиц в аналитической механике. В оптике ход лучей удовлетворяет принципу Ферма (см. § 3.6 кн. 4), в механике вид траектории удовлетворяет так называемому принципу наименьшего действия.

Если силовое поле, в котором движется частица, стационарно, то функция $U$ не зависит явно от времени и имеет, как уже отмечалось, смысл потенциальной энергии. В этом случае решение уравнения Шрёдингера распадается на два множителя, один из которых зависит только от координат, другой — только от времени:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right). \tag{4.11}$$

Здесь $E$ — полная энергия частицы, которая в случае стационарного поля остается постоянной. Чтобы убедиться в справедливости выражения (4.11), подставим его в уравнение (4.9). В результате получим соотношение

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\nabla^2\psi + U\psi\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) = \\ = i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\psi\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right).$$

Сократив на общий множитель $\exp(-i(E/\hbar)t)$, придем к дифференциальному уравнению, определяющему функцию $\psi$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = E\psi. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) называется уравнением Шрёдингера для стационарных состояний. В дальнейшем мы будем иметь дело только с этим уравнением и для краткости будем называть его просто уравнением Шрёдингера. Уравнение (4.12) часто пишут в виде

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0. \tag{4.13}$$

Поясним, как можно прийти к уравнению Шрёдингера. Для простоты ограничимся одномерным случаем. Рассмотрим свободно движущуюся частицу. Согласно идее де Бройля ей нужно сопоставить плоскую волну

$$\Psi = a\exp[-i(\omega t - kx)]$$

(в квантовой механике принято показатель экспоненты брать со знаком минус). Заменив в соответствии с (4.1) и (4.2) $\omega$ и $k = 2\pi/\lambda$ на $E$ и $p$, придем к выражению

$$\Psi = a \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]. \tag{4.14}$$

Продифференцировав это выражение один раз по $t$, а второй раз дважды по $x$, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E\Psi, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 \Psi.$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \qquad p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \tag{4.15}$$

В нерелятивистской классической механике энергия $E$ и импульс $p$ свободной частицы связаны соотношением

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Подставив в это соотношение выражения (4.15) для $E$ и $p^2$ и сократив затем на $\Psi$, получим уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

которое совпадает с уравнением (4.9), если в последнем положить $U = 0$.

В случае частицы, движущейся в силовом поле, характеризуемом потенциальной энергией $U$, энергия $E$ и импульс $p$ связаны соотношением

$$\frac{p^2}{2m} = E - U.$$

Распространив и на этот случай выражения (4.15) для $E$ и $p^2$, получим

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - U.$$

Умножив это соотношение на $\Psi$ и перенеся член $U\Psi$ влево, придем к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

совпадающему с уравнением (4.9).

Изложенные рассуждения не имеют доказательной силы и не могут рассматриваться как вывод уравнения Шрёдингера. Их цель — пояснить, каким образом можно было прийти к установлению этого уравнения.

В квантовой механике большую роль играет понятие оператора. Под **оператором** подразумевают правило, посредством которого одной функции (обозначим ее $\varphi$) сопоставляется другая функция (обозначим ее $f$). Символически это записывается следующим образом:

$$f = \widehat{Q}\varphi. \tag{4.16}$$

Здесь $\widehat{Q}$ — символическое обозначение оператора (с таким же успехом можно было взять любую другую букву с «шляпкой» над ней, например $\widehat{A}$, $\widehat{U}$, $\widehat{M}$ и т. д.). В формуле (4.10) роль $\widehat{Q}$ играет $\nabla^2$, роль $\varphi$ — функция $\Psi$, а роль $f$ — правая часть формулы.

Под символом оператора скрывается совокупность действий, с помощью которых исходная функция ($\varphi$) превращается в другую функцию ($f$). Например, под символом $\nabla^2$ скрывается двукратное дифференцирование по всем трем координатам $x$, $y$ и $z$ с последующим суммированием полученных выражений. Оператор может, в частности, представлять собой умножение исходной функции $\varphi$ на некоторую функцию $U$. Тогда $f = \widehat{U}\varphi = U\varphi$ и, следовательно, $\widehat{U} = U$.

Если рассматривать функцию $U$ в уравнении (4.12) как оператор, действие которого на пси-функцию сводится к умножению $\psi$ на $U$, то уравнению (4.12) можно придать вид

$$\widehat{H}\psi = E\Psi. \tag{4.17}$$

В этом уравнении символом $\widehat{H}$ обозначен оператор, равный сумме операторов $-(\hbar^2/2m)\nabla^2$ и $U$:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U. \tag{4.18}$$

Оператор $\widehat{H}$ называют **гамильтонианом**.

Гамильтониан является оператором энергии $E$. В квантовой механике другим динамическим переменным также сопоставляются операторы. Соответственно рассматриваются операторы координат, импульса, момента импульса и т. д. Для каждой динамической переменной $q$

составляется уравнение, аналогичное уравнению (4.17). Оно имеет вид

$$\hat{Q}\psi = q\psi, \qquad (4.19)$$

где $\hat{Q}$ — оператор, сопоставляемый динамической переменной $q$. Значение подобных уравнений выясняется в § 4.7.

## 4.5. Смысл пси-функции

Правильную интерпретацию пси-функции дал Борн[11]) в 1926 г. Согласно Борну квадрат модуля пси-функции определяет вероятность $dP$ того, что частица будет обнаружена в пределах объема $dV$:

$$dP = A|\Psi|^2\, dV = A\Psi^*\Psi\, dV \qquad (4.20)$$

($A$ — коэффициент пропорциональности).

Интеграл от выражения (4.20), взятый по всему объему, должен равняться единице:

$$\int dP = A\int \Psi^*\Psi\, dV = 1. \qquad (4.21)$$

Действительно, этот интеграл дает вероятность того, что частица находится в одной из точек пространства, т. е. вероятность достоверного события, которая равна единице.

В квантовой механике принимается, что пси-функция допускает умножение на отличное от нуля произвольное комплексное число $C$, причем $\Psi$ и $C\Psi$ описывают одно и то же состояние частицы. Это обстоятельство позволяет выбрать пси-функцию так, чтобы она удовлетворяла условию

$$\int \Psi^*\Psi\, dV = 1. \qquad (4.22)$$

Условие (4.22) носит название *условия нормировки*. Функции, удовлетворяющие этому условию, называются *нормированными*. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые нами пси-функции являются нормированными.

Для нормированной функции выражение (4.20) имеет вид

$$dP = |\Psi|^2\, dV = \Psi^*\Psi\, dV \qquad (4.23)$$

[11]) Макс Борн (1882–1970) — немецкий физик.

(это вытекает из сравнения формул (4.21) и (4.22)). Из (4.23) заключаем, что квадрат модуля пси-функции дает плотность вероятности (вероятность, отнесенную к единице объема) нахождения частицы в соответствующем месте пространства.

В случае стационарного силового поля пси-функция имеет вид (4.11). Соответственно

$$\Psi^*\Psi = \exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right)\psi^* \cdot \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\psi = \psi^*\psi,$$

так что плотность вероятности равна $\psi^*\psi$ и, следовательно, от времени не зависит. По этой причине состояния, описываемые пси-функциями вида (4.11), и были названы стационарными.

Из смысла пси-функции вытекает, что квантовая механика имеет статистический характер. Она не позволяет определить местонахождение частицы в пространстве или траекторию, по которой движется частица. С помощью пси-функции можно лишь предсказать, с какой вероятностью частица может быть обнаружена в различных точках пространства. На первый взгляд может показаться, что квантовая механика дает значительно менее точное и исчерпывающее описание движения частицы, чем классическая механика, которая определяет «точно» местоположение и скорость частицы в каждый момент времени. Однако в действительности это не так. Квантовая механика гораздо глубже вскрывает истинное поведение микрочастиц. Она лишь не определяет того, чего нет на самом деле. В применении к микрочастицам понятия определенного местоположения и траектории, как мы уже отмечали, вообще теряют смысл.

## 4.6. Квантование энергии

Уравнение Шрёдингера позволяет найти пси-функцию данного состояния и, следовательно, определить вероятность нахождения частицы в различных точках пространства. Однако этим далеко не исчерпывается значение указанного уравнения. Из уравнения (4.17) и условий, налагаемых на пси-функцию, непосредственно вытекают правила квантования энергии.

В соответствии со своим смыслом пси-функция должна быть однозначной, непрерывной и конечной (за исключением, быть может, особых точек). Кроме того, она должна

иметь непрерывную и конечную производную. Совокупность перечисленных требований носит название стандартных условий.

В уравнение Шрёдингера входит в качестве параметра полная энергия частицы $E$. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения вида (4.17) имеют решения, удовлетворяющие стандартным условиям, не при любых значениях параметра (т. е. энергии $E$), а лишь при некоторых избранных значениях. Эти избранные значения называются собственными значениями соответствующей величины (в нашем случае — энергии). Решения, соответствующие собственным значениям $E$, называются собственными функциями задачи.

Совокупность собственных значений величины называется ее спектром. Если эта совокупность образует дискретную последовательность, спектр называется дискретным. Если собственные значения образуют непрерывную последовательность, спектр называют непрерывным или сплошным. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких задач, у которых спектр собственных значений является дискретным.

В случае дискретного спектра собственные значения и собственные функции можно пронумеровать:

$$\begin{matrix} E_1, & E_2, & \ldots, & E_n, & \ldots, \\ \psi_1, & \psi_2, & \ldots, & \psi_n, & \ldots \end{matrix} \qquad (4.24)$$

Таким образом, квантование энергии получается из основных положений квантовой механики без каких-либо дополнительных предположений.

Нахождение собственных значений и собственных функций, как правило, представляет весьма трудную математическую задачу. Мы рассмотрим пример, достаточно

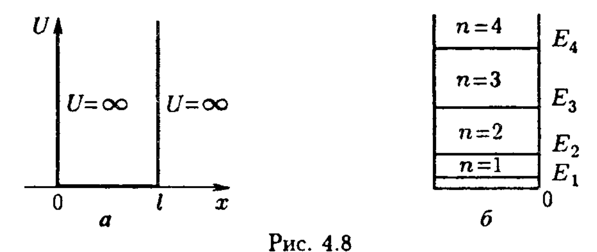



Рис. 4.8

простой для того, чтобы можно было решить уравнение Шрёдингера без большого труда.

Найдем собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции для частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Предположим, что частица может двигаться только вдоль оси $x$. Пусть движение ограничено непроницаемыми для частицы стенками: $x = 0$ и $x = l$. Потенциальная энергия $U$ имеет в этом случае следующий вид (рис. 4.8 $a$): она равна нулю при $0 \leq x \leq l$ и обращается в бесконечность при $x < 0$ и $x > l$.

Возьмем уравнение Шрёдингера в виде (4.13). Поскольку пси-функция зависит только от координаты $x$, уравнение упрощается следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \tag{4.25}$$

За пределы потенциальной ямы частица попасть не может. Поэтому вероятность обнаружения частицы вне ямы равна нулю. Соответственно и функция $\psi$ за пределами ямы равна нулю. Из условия непрерывности следует, что $\psi$ должна быть равна нулю и на границах ямы, т. е. что

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{4.26}$$

Это и есть то условие, которому должны удовлетворять решения уравнения (4.25).

В области, где $\psi$ не равна тождественно нулю, уравнение (4.25) имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{4.27}$$

(в этой области $U = 0$). Введя обозначение

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \tag{4.28}$$

придем к уравнению, хорошо известному из теории колебаний:

$$\psi'' + k^2\psi = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид [12])

$$\psi(x) = a\sin(kx + \alpha). \tag{4.29}$$

[12]) См. формулу (8.55) кн. 1. В рассматриваемом случае удобнее взять синус вместо косинуса.

Условиям (4.26) можно удовлетворить соответствующим выбором постоянных $k$ и $\alpha$. Прежде всего из условия $\psi(0) = 0$ получаем

$$\psi(0) = a \sin \alpha = 0,$$

откуда следует, что $\alpha$ должна быть равна нулю. Далее, должно выполняться условие

$$\psi(l) = a \sin kl = 0,$$

что возможно лишь в случае, если

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.30}$$

($n = 0$ отпадает, поскольку при этом получается $\psi \equiv 0$ — частица нигде не находится).

Исключив $k$ из уравнений (4.28) и (4.30), найдем собственные значения энергии частицы:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.31}$$

Спектр энергии оказался дискретным. На рис. 4.8 *б* изображена схема энергетических уровней.

Оценим расстояния между соседними уровнями для различных значений массы частицы $m$ и ширины ямы $l$. Разность энергий двух соседних уровней равна

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n + 1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n.$$

Если взять $m$ порядка массы молекулы ($\sim 10^{-23}$ г), а $l$ порядка 10 см (молекулы газа в сосуде), получается

$$\Delta E_n \approx \frac{3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-54}}{10^{-23} \cdot 10^2} n \text{ эрг} \approx 10^{-32} n \text{ эрг}.$$

Столь густо расположенные энергетические уровни будут практически восприниматься как сплошной спектр энергии, так что хотя квантование энергии в принципе будет иметь место, но на характере движения молекул сказываться не будет.

Аналогичный результат получается, если взять $m$ порядка массы электрона ($\sim 10^{-27}$ г) при тех же размерах ямы (свободные электроны в металле). В этом случае

$$\Delta E_n \approx 10^{-28} n \text{ эрг} \approx 10^{-16} n \text{ эВ}.$$

Однако совсем иной результат получается для электрона, если область, в пределах которой он движется, будет порядка атомных размеров ($\sim 10^{-8}$ см). В этом случае

$$\Delta E_n \approx \frac{3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-54}}{10^{-27} \cdot 10^{-16}} n \text{ эрг} \approx 10^{-10} n \text{ эрг} \approx 10^2 n \text{ эВ},$$

так что дискретность энергетических уровней будет весьма заметной.

Подставив в (4.29) значение $k$, получающееся из условия (4.30), найдем собственные функции задачи:

$$\psi_n(x) = a \sin \frac{n\pi x}{l}$$

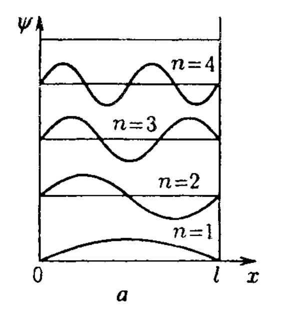
(напомним, что $\alpha = 0$). Для нахождения коэффициента $a$ воспользуемся условием нормировки (4.22), которое в данном случае запишется следующим образом:

$$a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = 1.$$

На концах промежутка интегрирования подынтегральная функция обращается в нуль. Поэтому значение интеграла можно получить, умножив среднее значение $\sin^2(n\pi x/l)$ (равное, как известно, 1/2) на длину промежутка $l$. В результате получим $a^2 l/2 = 1$, откуда $a = \sqrt{2/l}$. Таким образом, собственные функции имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (4.32)$$

Графики собственных функций изображены на рис. 4.9 *а*. На рис. 4.9 *б* дана плотность вероятности обнаружения



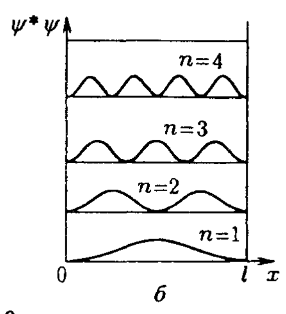




Рис. 4.9

частицы на различных расстояниях от стенок ямы, равная $\psi^*\psi$. Из графиков, например, следует, что в состоянии с $n = 2$ частица не может быть обнаружена в середине ямы и вместе с тем одинаково часто бывает как в левой, так и в правой половине ямы. Такое поведение частицы, очевидно, несовместимо с представлением о траекториях. Отметим, что согласно классическим представлениям все положения частицы в яме равновероятны.

## 4.7. Квантование момента импульса

В § 4.4 было указано, что в квантовой механике каждой физической величине $q$ сопоставляется оператор $\widehat{Q}$ (для каждой величины оператор обозначается по-своему: для энергии — $\widehat{H}$, для импульса — $\widehat{\mathbf{p}}$ и т. д.). Решая уравнение

$$\widehat{Q}\psi = q\psi,$$

находят собственные значения $q_1, q_2, \ldots$ оператора $\widehat{Q}$. Согласно одному из постулатов квантовой механики при измерениях физической величины $q$, представляемой оператором $\widehat{Q}$, могут получаться только результаты, совпадающие с собственными значениями этого оператора.

Возможны состояния, для которых при измерениях некоторой величины $q$ всегда получается одно и то же значение $q_n$. О таких состояниях говорят как о состояниях, в которых величина $q$ имеет определенное значение. Однако возможны также состояния, для которых при измерениях получаются с разной вероятностью различные собственные значения оператора $\widehat{Q}$. О таких состояниях говорят как о состояниях, в которых величина $q$ не имеет определенного значения.

Применительно к моменту импульса в квантовой механике вводятся четыре оператора: оператор квадрата момента $\widehat{\mathbf{M}^2}$ и три оператора проекций момента на оси координат: $\widehat{M}_x$, $\widehat{M}_y$ и $\widehat{M}_z$. Оказывается, что одновременно могут иметь определенные значения лишь квадрат момента и одна из проекций момента на координатные оси. Две другие проекции оказываются при этом совершенно неопределенными[13]). Это означает, что «вектор» момента не имеет определенного направления и, следовательно, не

[13]) Исключение составляет случай, когда все три проекции момента на оси $x$, $y$, $z$ имеют определенное значение, равное нулю.

может быть изображен, как в классической механике, с помощью направленного отрезка прямой.

Решение уравнения

$$\widehat{\mathrm{M}}^2\psi = M^2\psi$$

является очень трудным. Поэтому мы ограничимся приведением конечных результатов: собственные значения оператора квадрата момента импульса равны

$$M^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.33}$$

Здесь $l$ — квантовое число, называемое азимутальным. Следовательно, модуль момента импульса может иметь лишь дискретные значения, определяемые формулой

$$M = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.34}$$

Вид оператора $\widehat{M}_z$ довольно прост. Поэтому мы можем рассмотреть решение уравнения

$$\widehat{M}_z\psi = M_z\psi \tag{4.35}$$

в качестве еще одного примера на нахождение собственных значений (первый пример был рассмотрен в предыдущем параграфе, в котором были определены собственные значения энергии для частицы в потенциальной яме).

В сферических координатах ($r$, $\vartheta$, $\varphi$) оператор проекции момента импульса на полярную ось $z$ (от которой отсчитывается полярный угол $\vartheta$) имеет вид

$$\widehat{M}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Следовательно, уравнение (4.35) выглядит следующим образом:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = M_z\psi. \tag{4.36}$$

Подстановка $\psi = \exp(\alpha\varphi)$ приводит после сокращения на общий множитель $\exp(\alpha\varphi)$ к алгебраическому уравнению

$$-i\hbar\alpha = M_z,$$

из которого для $\alpha$ получается значение $iM_z/\hbar$. Таким образом, решение уравнения (4.36) имеет вид

$$\psi = C\exp\left(i\frac{M_z}{\hbar}\varphi\right).$$

Для того чтобы эта функция была однозначной, необходимо выполнение условия $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ или

$$\exp\left[i\frac{M_z}{\hbar}(\varphi + 2\pi)\right] = \exp\left(i\frac{M_z}{\hbar}\varphi\right).$$

Это условие будет выполнено, если положить $M_z = m\hbar$, где $m$ — целое положительное или отрицательное число либо нуль. Следовательно, оператор $\widehat{M}_z$ обладает дискретным спектром:

$$M_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{4.37}$$

По причинам, которые выяснятся в дальнейшем, $m$ называется магнитным квантовым числом. Напомним, что квантование проекции момента было обнаружено экспериментально Штерном и Герлахом (см. § 7.6 кн. 2).

Поскольку проекция вектора не может превзойти модуль этого вектора, должно выполняться условие

$$|m\hbar| \le \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

Отсюда следует, что максимальное возможное значение $|m|$ равно $l$.

Для удобства обозрения напишем вместе полученные результаты:

$$\begin{aligned} M &= \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad && (l = 0, 1, 2, \ldots), \\ M_z &= m\hbar && (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Из этих формул вытекает, что $|M_z|$ всегда меньше $M$. Следовательно, направление момента импульса не может совпадать с выделенным в пространстве направлением. Это согласуется с тем обстоятельством, что направление момента в пространстве является неопределенным.

Подчеркнем, что отличные от (4.38) значения $M$ и $M_z$ не могут наблюдаться ни при каких обстоятельствах. Следовательно, моменты макроскопических тел также подчиняются правилам (4.38). Правда, вследствие малости $\hbar$ дискретность моментов макроскопических тел практически не обнаруживается, подобно тому как вследствие малости элементарного заряда $e$ не обнаруживается дискретность макроскопических электрических зарядов.

Отметим, что из правил квантования момента вытекает, что постоянную Планка $\hbar$ можно рассматривать как естественную единицу момента импульса.

Момент импульса системы, состоящей из нескольких микрочастиц, равен сумме моментов отдельных частиц. Суммарный момент, как и всякий момент вообще, определяется выражением

$$M = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \tag{4.39}$$

где $L$ — азимутальное квантовое число результирующего момента. В случае системы, состоящей из двух частиц, число $L$ может иметь значения

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \ldots, |l_1 - l_2|, \tag{4.40}$$

где $l_1$ и $l_2$ — числа, определяющие модули складываемых моментов по формуле

$$M_i = \hbar\sqrt{l_i(l_i+1)}.$$

Легко сообразить, что результирующий момент может иметь $2l_2+1$ или $2l_1+1$ различных значений (нужно взять меньшее из двух $l$).

В случае системы, состоящей из большего чем два числа частиц, максимальное значение квантового числа $L$, очевидно, равно сумме чисел $l$ отдельных частиц. Чтобы найти минимальное значение $L$, нужно сложить сначала числа $l$ любых двух частиц. Затем каждый из полученных результатов складывается с $l$ третьей частицы и т. д. Наименьшее из получившихся при этом чисел будет представлять собой минимальное возможное значение квантового числа $L$. Пусть, например, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Возможные значения суммарного момента первой и второй частиц определяются числами 0, 1 и 2. Сложение первого из этих результатов с $l_3 = 1$ дает $L = 1$, второго результата — $L = 0$, 1 и 2, третьего результата — $L = 1$, 2 и 3. Следовательно, квантовое число, определяющее результирующий момент в рассматриваемом случае, может иметь значения $L = 0$, 1, 2, 3. Минимальное значение $L$ оказалось равным 0, максимальное, как и следовало ожидать, равно 3 (1+1+1).

Проекция результирующего момента на некоторое направление $z$ определяется, как и для любого момента вообще, выражением (см. (4.38))

$$M_z = m_L\hbar \quad (m_L = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm L). \tag{4.41}$$

Механический момент заряженной частицы неразрывно связан с ее магнитным моментом (см. § 7.6 кн. 2).

Магнитные моменты, как мы знаем, взаимодействуют друг с другом. Каждому из возможных значений результирующего момента соответствует свое значение энергии взаимодействия. При воздействии на систему слабого магнитного поля связь между моментами не нарушается и проецируется на направление **B** результирующий момент. В случае достаточно сильного поля связь между моментами разрывается и каждый из этих моментов проецируется на направление **B** независимо от других.

## 4.8. Принцип суперпозиции

Одним из основных положений квантовой механики является принцип суперпозиции состояний. Суть этого принципа заключается в следующем. Пусть некоторая квантовомеханическая система может находиться как в состоянии $\psi'$, так и в состоянии $\psi''$. Тогда существует состояние системы, описываемое функцией

$$\psi = c'\psi' + c''\psi''$$

($c'$ и $c''$ — произвольные комплексные числа).

Из принципа суперпозиции вытекают очень важные следствия. Рассмотрим совокупность собственных значений некоторой физической величины $q$ и соответствующих им собственных функций:

$$\begin{matrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n, & \ldots, \\ \psi_1, & \psi_2, & \ldots, & \psi_n, & \ldots \end{matrix}$$

В каждом из состояний, описываемых этими функциями, величина $q$ имеет определенное значение: в состоянии $\psi_1$ — значение $q_1$, в состоянии $\psi_2$ — значение $q_2$ и т. д. Согласно принципу суперпозиции возможно состояние, описываемое функцией

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2.$$

В этом состоянии величина $q$ уже не имеет определенного значения — при измерениях будет получаться либо значение $q_1$, либо значение $q_2$. Вероятности появления этих значений равны квадратам модулей коэффициентов $c_1$ и $c_2$, т. е. вероятность получить при измерениях результат $q_1$ равна $|c_1|^2$, а вероятность получить результат $q_2$ равна $|c_2|^2$ (функции $\psi_1$ и $\psi_2$ предполагаются, как мы условились в § 4.5, нормированными).

В квантовой механике принимается, что совокупность собственных функций любой физической величины $q$ образует полную систему. Это означает, что пси-функцию

любого состояния можно разложить по собственным функциям этой величины, т. е. представить в виде

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \tag{4.42}$$

где $c_n$ — не зависящие от координат, в общем случае комплексные числа (для состояния, изменяющегося со временем, коэффициенты $c_n$ зависят от $t$). Число слагаемых в сумме равно числу различных собственных функций величины $q$ (для разных величин это число колеблется от 2 до $\infty$).

Квадраты модулей коэффициентов $c_n$ дают вероятности того, что при измерениях, производимых над системой, находящейся в состоянии $\psi$, будут получены соответствующие значения величины $q$. Поскольку сумма всех таких вероятностей должна быть равна единице, коэффициенты $c_n$ удовлетворяют условию

$$\sum_n |c_n|^2 = 1.$$

Для нормированных $\psi_n$ это условие всегда выполняется.

Зная вероятности различных значений величины $q$, можно найти среднее значение этой величины в состоянии $\psi$:

$$\langle q \rangle = \sum_n |c_n|^2 q_n. \tag{4.43}$$

В случае нестационарных состояний $c_n = c_n(t)$; следовательно, формула (4.43) показывает, как среднее значение величины $q$ изменяется со временем.

## 4.9. Прохождение частиц через потенциальный барьер

Пусть частица, движущаяся слева направо, встречает на своем пути потенциальный барьер высоты $U_0$ и ширины $l$ (рис. 4.10). По классическим представлениям поведение частицы имеет следующий характер. Если энергия частицы больше высоты барьера ($E > U_0$), частица беспрепятственно проходит над барьером (на участке $0 \leq x \leq l$ лишь уменьшается скорость частицы, но затем при $x > 1$ снова принимает первоначаль-

Рис. 4.10

ное значение). Если же $E$ меньше $U_0$ (как изображено на рисунке), то частица отражается от барьера и летит в обратную сторону; сквозь барьер частица проникнуть не может.

Совершенно иначе выглядит поведение частицы согласно квантовой механике. Во-первых, даже при $E > U_0$ имеется отличная от нуля вероятность того, что частица отразится от барьера и полетит в обратную сторону. Во-вторых, при $E < U_0$ имеется отличная от нуля вероятность того, что частица проникнет «сквозь» барьер и окажется в области, где $x > l$. Такое, совершенно невозможное с классической точки зрения, поведение микрочастицы вытекает непосредственно из уравнения Шрёдингера.

Рассмотрим случай $E < U_0$. В этом случае уравнение (4.13) имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{4.44}$$

для областей I и III и

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi = 0 \tag{4.45}$$

для области II, причем $E - U_0 < 0$.

Будем искать решение уравнения (4.44) в виде $\psi = \exp(\lambda x)$ (см. §8.3 кн. 1). Подстановка этой функции в (4.44) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E = 0.$$

Отсюда $\lambda = \pm i\alpha$, где

$$\alpha = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}. \tag{4.46}$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.44) имеет вид

$$\psi_1 = A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x) \quad \text{для области I,}$$
$$\psi_3 = A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x) \quad \text{для области III.} \tag{4.47}$$

Решив подстановкой $\psi = \exp(\lambda x)$ уравнение (4.45), получим общее решение этого уравнения в виде

$$\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x) \quad \text{для области II.} \tag{4.48}$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}. \qquad (4.49)$$

Заметим, что решение вида $\exp(i\alpha x)$ соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси $x$, а решение вида $\exp(-i\alpha x)$ — волне, распространяющейся в противоположном направлении. Чтобы это понять, вспомним, что обычная (звуковая, электромагнитная и т. п.) плоская волна, распространяющаяся в направлении возрастания $x$, описывается вещественной частью выражения $\exp[i(\omega t - kx)]$, а волна, распространяющаяся в направлении убывания $x$, — вещественной частью выражения $\exp[i(\omega t + kx)]$. Частице, движущейся в положительном направлении оси $x$, сопоставляется функция $\psi = a\exp[(i/\hbar)(px - Et)]$ (см. формулу (4.14)). Если отбросить в этой функции временной множитель, то для $\psi$ получится выражение $a\exp[i(p/\hbar)x]$.

Для частицы, движущейся в противоположном направлении, $\psi = a\exp[-i(p/\hbar)x]$.

В области III имеется только волна, прошедшая через барьер и распространяющаяся слева направо. Поэтому коэффициент $B_3$ в выражении (4.47) для $\psi_3$ следует положить равным нулю. Для нахождения остальных коэффициентов воспользуемся условиями, которым должна удовлетворять функция $\psi$. Для того чтобы $\psi$ была непрерывна во всей области изменений $x$ от $-\infty$ до $+\infty$, должны выполняться условия $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ и $\psi_2(l) = \psi_3(l)$. Для того чтобы $\psi$ была гладкой, т. е. не имела изломов, должны выполняться условия $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$ и $\psi_2'(l) = \psi_3'(l)$. Из этих условий вытекают соотношения

$$\begin{gathered} A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \\ A_2\exp(\beta l) + B_2\exp(-\beta l) = A_3\exp(i\alpha l), \\ i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta A_2 - \beta B_2, \\ \beta A_2\exp(\beta l) - \beta B_2\exp(-\beta l) = i\alpha A_3\exp(i\alpha l). \end{gathered} \qquad (4.50)$$

Разделим все уравнения на $A_1$ и введем обозначения:

$$b_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad b_2 = \frac{B_2}{A_1}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1},$$

а также

$$n = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}. \qquad (4.51)$$

Тогда уравнения (4.50) примут вид

$$\begin{gathered} 1 + b_1 = a_2 + b_2, \\ a_2 \exp(\beta l) + b_2 \exp(-\beta l) = a_3 \exp(i\alpha l), \\ i - ib_1 = na_2 - nb_2, \\ na_2 \exp(\beta l) - nb_2 \exp(-\beta l) = ia_3 \exp(i\alpha l). \end{gathered} \tag{4.52}$$

Отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающей волн

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |b_1|^2$$

определяет вероятность отражения частицы от потенциального барьера и может быть названо коэффициентом отражения.

Отношение квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = |a_3|^2 \tag{4.53}$$

определяет вероятность прохождения частицы через барьер и может быть названо коэффициентом прохождения (или коэффициентом прозрачности).

Нас будет интересовать только прохождение частиц через барьер, и мы ограничимся нахождением величины $D$ Правда, найдя $D$, легко найти $R$, поскольку эти коэффициенты связаны очевидным соотношением $R + D = 1$.

Умножим первое из уравнений (4.52) на $i$ и сложим с третьим. В результате получим

$$2i = (n + i)a_2 - (n - i)b_2. \tag{4.54}$$

Теперь умножим второе из уравнений (4.52) на $i$ и вычтем его из четвертого. Получим

$$(n - i)\exp(\beta l)a_2 - (n + i)\exp(-\beta l)b_2 = 0. \tag{4.55}$$

Решив совместно уравнения (4.54) и (4.55), найдем, что

$$a_2 = \frac{2i(n + i)\exp(-\beta l)}{(n + i)^2 \exp(-\beta l) - (n - i)^2 \exp(\beta l)},$$

$$b_2 = \frac{2i(n - i)\exp(\beta l)}{(n + i)^2 \exp(-\beta l) - (n - i)^2 \exp(\beta l)}.$$

Наконец, подставив найденные нами значения $a_2$ и $b_2$ во второе из уравнений (4.52), получим выражение для $a_3$:

$$a_3 = \frac{4ni}{(n+i)^2 \exp(-\beta l) - (n-i)^2 \exp(\beta l)} \exp(-i\alpha l).$$

Величина

$$\beta l = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

обычно бывает много больше единицы. Поэтому в знаменателе выражения для $a_3$ слагаемым, содержащим множитель $\exp(-\beta l)$, можно пренебречь по сравнению со слагаемым, содержащим множитель $\exp(\beta l)$ (комплексные числа $n+i$ и $n-i$ имеют одинаковый модуль). Итак, можно положить

$$a_3 \approx -\frac{4ni \exp(-i\alpha l)}{(n-i)^2} \exp(-\beta l).$$

Согласно (4.53) квадрат модуля этой величины дает вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер. Учтя, что $|n-i| = \sqrt{n^2+1}$, получим

$$D = |a_3|^2 \approx \frac{16n^2}{(n^2+1)^2} \exp(-2\beta l),$$

где (см. формулу (4.51))

$$n^2 = \frac{U_0 - E}{E} = \frac{U_0}{E} - 1.$$

Выражение $16n^2/(n^2+1)^2$ имеет значение порядка единицы[14]. Поэтому можно считать, что

$$D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}l\right]. \qquad (4.56)$$

Из полученного нами выражения следует, что вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер сильно зависит от ширины барьера $l$ и от его превышения над $E$, т. е. от $U_0 - E$. Если при какой-то ширине барьера коэффициент прохождения $D$ равен, допустим, 0,01, то

[14]) Функция $16x/(x+1)^2$ имеет при $x = 1$ максимум, равный четырем. В интервале значений $x$ от 0,03 до 30 функция лежит в пределах от 0,5 до 4.

при увеличении ширины в два раза $D$ станет равным $0,01^2 = 0,0001$, т. е. уменьшается в 100 раз. Тот же эффект в этом случае вызвало бы возрастание в четыре раза величины $U_0 - E$. Коэффициент прохождения резко уменьшается при увеличении массы частицы $m$.

Соответствующий расчет дает, что в случае потенциального барьера произвольной формы (рис. 4.11) формула (4.56) должна быть заменена более общей формулой

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(U-E)}\,dx\right], \qquad (4.57)$$

где $U = U(x)$.

При преодолении потенциального барьера частица как бы проходит через «туннель» в этом барьере (см. заштрихованную область на рис. 4.11), в связи с чем рассмотренное нами явление называют **туннельным эффектом**.

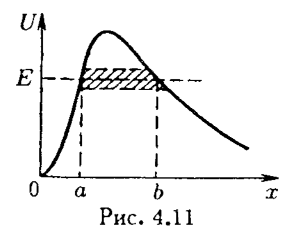


Рис. 4.11

С классической точки зрения туннельный эффект представляется абсурдным, так как частица, «находящаяся в туннеле», должна была бы обладать отрицательной кинетической энергией (в туннеле $E < U$). Однако туннельный эффект — явление специфически квантовое, не имеющее аналога в классической физике. В квантовой же механике деление полной энергии на кинетическую и потенциальную не имеет смысла, так как противоречит принципу неопределенности. Действительно, тот факт, что частица обладает определенной кинетической энергией $T$, был бы равнозначен тому, что частица имеет определенный импульс $p$.

Аналогично тот факт, что частица имеет определенную потенциальную энергию $U$, означал бы, что частица находится в точно заданном месте пространства. Поскольку координата и импульс частицы не могут одновременно иметь определенных значений, не могут быть одновременно точно определены $T$ и $U$. Таким образом, хотя полная энергия частицы $E$ имеет вполне определенное значение, она не может быть представлена в виде суммы точно определенных энергий $T$ и $U$. Ясно, что в этом случае заключение об отрицательности $T$ «внутри» туннеля становится беспочвенным.

## 4.10. Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называют частицу, совершающую одномерное движение под действием квазиупругой силы $F = -kx$. Потенциальная энергия такой частицы имеет вид

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.58)$$

Собственная частота классического гармонического осциллятора равна $\omega = \sqrt{k/m}$, где $m$ — масса частицы (см. § 8.9 кн. 1).

Выразив в формуле (4.58) $k$ через $m$ и $\omega$, получим

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

В одномерном случае $\nabla^2\psi = d^2\psi/dx^2$. Поэтому уравнение Шрёдингера (см. (4.13)) для осциллятора выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\psi = 0 \quad (4.59)$$

($E$ — полная энергия осциллятора). В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнение (4.59) имеет конечные, однозначные и непрерывные решения при значениях параметра $E$, равных

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (4.60)$$

На рис. 4.12 дана схема энергетических уровней гармонического осциллятора. Для наглядности уровни вписаны в кривую потенциальной энергии. Однако следует помнить, что в квантовой механике полная энергия не может быть представлена в виде суммы точно определенных энергий $T$ и $U$ (см. последний абзац предыдущего параграфа).

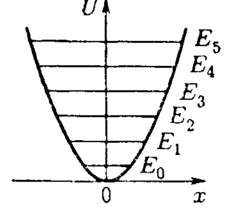


Рис. 4.12

Уровни энергии гармонического осциллятора являются эквидистантными, т. е. отстоящими друг от друга на одинаковое расстояние. Наименьшее возможное значение энергии равно $E_0 = \hbar\omega/2$. Это значение называется **нулевой энергией**. Существование ну-

левой энергии подтверждается экспериментами по изучению рассеяния света кристаллами при низких температурах Оказывается, что интенсивность рассеянного света по мере понижения температуры стремится не к нулю, а к некоторому конечному значению, указывающему на то, что и при абсолютном нуле колебания атомов в кристаллической решетке не прекращаются.

Квантовая механика позволяет вычислить вероятности различных переходов квантовой системы из одного состояния в другое. Подобные вычисления показывают, что для гармонического осциллятора возможны лишь переходы между соседними уровнями. При таких переходах квантовое число $n$ изменяется на единицу

$$\Delta n = \pm 1. \tag{4.61}$$

Условия, накладываемые на изменения квантовых чисел при переходах системы из одного состояния в другое, называются *правилами отбора*. Таким образом, для гармонического осциллятора существует правило отбора, выражаемое формулой (4.61).

Из правила (4.61) вытекает, что энергия гармонического осциллятора может изменяться только порциями $\hbar\omega$. Этот результат, получающийся естественным образом в квантовой механике, совпадает с тем весьма чужеродным для классической физики предположением, которое пришлось сделать Планку, чтобы вычислить испускательную способность абсолютно черного тела (см. § 1.7). Отметим, что Планк предполагал, что энергия гармонического осциллятора может быть лишь целой кратной $\hbar\omega$. В действительности же имеется еще нулевая энергия, существование которой было установлено только после создания квантовой механики.

# Глава 5

# Физика атомов и молекул

## 5.1. Атом водорода

Рассмотрим систему, состоящую из неподвижного ядра с зарядом $Ze$ ($Z$ — целое число) и движущегося вокруг него электрона. При $Z > 1$ такая система называется водородоподобным ионом; при $Z = 1$ она представляет собой атом водорода.

Потенциальная энергия электрона равна

$$U = -\frac{Ze^2}{r}$$

($r$ — расстояние электрона от ядра). Следовательно, уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\nabla^2\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi = 0 \qquad (5.1)$$

($m_e$ — масса электрона).

Поле, в котором движется электрон, является центрально-симметричным. Поэтому целесообразно воспользоваться сферической системой координат: $r$, $\vartheta$, $\varphi$. Подставив в (5.1) выражение оператора Лапласа в сферических координатах, придем к уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi = 0. \qquad (5.2)$$

Можно показать, что уравнение (5.2) имеет требуемые (т. е. однозначные, конечные и непрерывные) решения в следующих случаях: 1) при любых положительных энергиях $E$; 2) при дискретных отрицательных значениях энергии, равных

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (5.3)$$

Случай $E > 0$ соответствует электрону, пролетающему вблизи ядра и удаляющемуся снова на бесконечность. Случай $E < 0$ соответствует электрону, связанному с ядром. Сравнение с выражением (3.31) показывает, что квантовая механика приводит к таким же значениям энергии водородного атома, какие получались и в теории Бора. Однако в квантовой механике эти значения получаются как следствие основных положений этой науки. Бору же для получения такого результата пришлось вводить специальные дополнительные предположения.

Собственные функции уравнения (5.2) содержат три целочисленных параметра $n$, $l$ и $m$:

$$\psi = \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi). \tag{5.4}$$

Параметр $n$, называемый **главным квантовым числом**, совпадает с номером уровня энергии (см. формулу (5.3)). Параметры $l$ и $m$ представляют собой азимутальное и магнитное квантовые числа, определяющие по формулам (4.38) модуль момента импульса и проекцию момента на некоторое направление $z$.

Решения, удовлетворяющие стандартным условиям, получаются лишь для значений $l$, не превышающих $n-1$. Следовательно, при данном $n$ квантовое число $l$ может принимать $n$ различных значений:

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

При данном $l$ квантовое число $m$ может принимать $2l+1$ различных значений:

$$m = -l,\ -l+1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots,\ l-1,\ l$$

(см. формулы (4.38)).

Согласно (5.3) энергия электрона зависит только от главного квантового числа $n$. Следовательно, каждому собственному значению энергии $E_n$ (кроме $E_1$) соответствует несколько собственных функций $\psi_{nlm}$, различающихся значениями квантовых чисел $l$ и $m$. Это означает, что атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в нескольких различных состояниях. В табл. 5.1 приведены состояния, соответствующие первым трем энергетическим уровням.

Состояния с одинаковой энергией называются **вырожденными**, а число различных состояний с каким-либо значением энергии называется **кратностью вырождения** соответствующего энергетического уровня.

Кратность вырождения уровней водорода легко вычислить, исходя из возможных значений для $l$ и $m$. Каждому из $n$ значений квантового числа $l$ соответствует $2l+1$ значений квантового числа $m$. Следовательно, число различных состояний, соответствующих данному $n$, равно

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2.$$

Таким образом, кратность вырождения энергетических уровней водородного атома равна $n^2$ (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1

| Уровень энергии $E_n$ | Пси-функция $\psi_{nlm}$ | Значение $n$ | Значение $l$ | Значение $m$ | Уровень энергии $E_n$ | Пси-функция $\psi_{nlm}$ | Значение $n$ | Значение $l$ | Значение $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | $\psi_{100}$ | 1 | 0 | 0 | $E_3$ | $\psi_{300}$ | 3 | 0 | 0 |
| | | | | | | $\psi_{31-1}$ | 3 | 1 | −1 |
| | | | | | | $\psi_{310}$ | 3 | 1 | 0 |
| | | | | | | $\psi_{31+1}$ | 3 | 1 | +1 |
| $E_2$ | $\psi_{200}$ | 2 | 0 | 0 | | $\psi_{32-2}$ | 3 | 2 | −2 |
| | $\psi_{21-1}$ | 2 | 1 | −1 | | $\psi_{32-1}$ | 3 | 2 | −1 |
| | $\psi_{210}$ | 2 | 1 | 0 | | $\psi_{320}$ | 3 | 2 | 0 |
| | $\psi_{21+1}$ | 2 | 1 | +1 | | $\psi_{32+1}$ | 3 | 2 | +1 |
| | | | | | | $\psi_{32+2}$ | 3 | 2 | +2 |

Состояния с различными значениями азимутального квантового числа $l$ различаются значениями момента импульса. В атомной физике применяются заимствованные из спектроскопии условные обозначения состояний электрона с разными значениями момента импульса. Электрон, находящийся в состоянии с $l = 0$, называют $s$-электроном (соответствующее состояние — $s$-состоянием), с $l = 1$ — $p$-электроном, с $l = 2$ — $d$-электроном, с $l = 3$ — $f$-электроном, затем идут $g$, $h$ и т. д. уже по алфавиту. Значение главного квантового числа указывается перед условным обозначением квантового числа $l$. Таким образом, электрон в состоянии с $n = 3$ и $l = 1$ обозначается символом $3p$ и т. д.

Поскольку $l$ всегда меньше $n$, возможны следующие состояния электрона:

$$\begin{array}{llll} 1s, & & & \\ 2s, & 2p, & & \\ 3s, & 3p, & 3d, & \\ 4s, & 4p, & 4d, & 4f \end{array}$$

и т. д.

Схему уровней энергии можно было бы изобразить так, как это было сделано в § 3.6 (см. рис. 3.13). Однако гораздо удобнее пользоваться схемой, показанной на рис. 5.1. На этой схеме отражено (правда частично) вырождение уровней, кроме того, она имеет еще ряд существенных преимуществ, которые вскоре станут очевидными.

Мы знаем, что испускание и поглощение света происходит при переходах электрона с одного уровня на другой. В квантовой механике доказывается, что для азимутального квантового числа $l$ имеется правило отбора

$$\Delta l = \pm 1. \tag{5.5}$$

Это означает, что возможны только такие переходы, при которых $l$ изменяется на единицу. Правило (5.5) обусловлено тем, что фотон обладает собственным моментом импульса (спином[1]), равным примерно $\hbar$ (в дальнейшем мы уточним его значение). При испускании фотон уносит из атома этот момент, а при поглощении привносит, так что правило отбора (5.5) есть просто следствие закона сохранения момента импульса.

На рис. 5.1 показаны переходы, разрешенные правилом (5.5). Пользуясь условными обозначениями состояний электрона, переходы, приводящие к возникновению серии Лаймана, можно записать в виде

$$np \to 1s \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

серии Бальмера соответствуют переходы

$$np \to 2s, \quad ns \to 2p \quad \text{и} \quad nd \to 2p \quad (n = 3, 4, \ldots),$$

и т. д.

Состояние $1s$ является основным состоянием атома водорода. В этом состоянии атом обладает минимальной энергией. Чтобы перевести атом из основного состояния в возбужденное (т. е. в состояние с большей энергией),

[1]) О спине речь пойдет в § 5.4.

ему необходимо сообщить энергию. Это может быть осуществлено за счет теплового соударения атомов (по этой причине нагретые тела светятся — атомы излучают, воз-

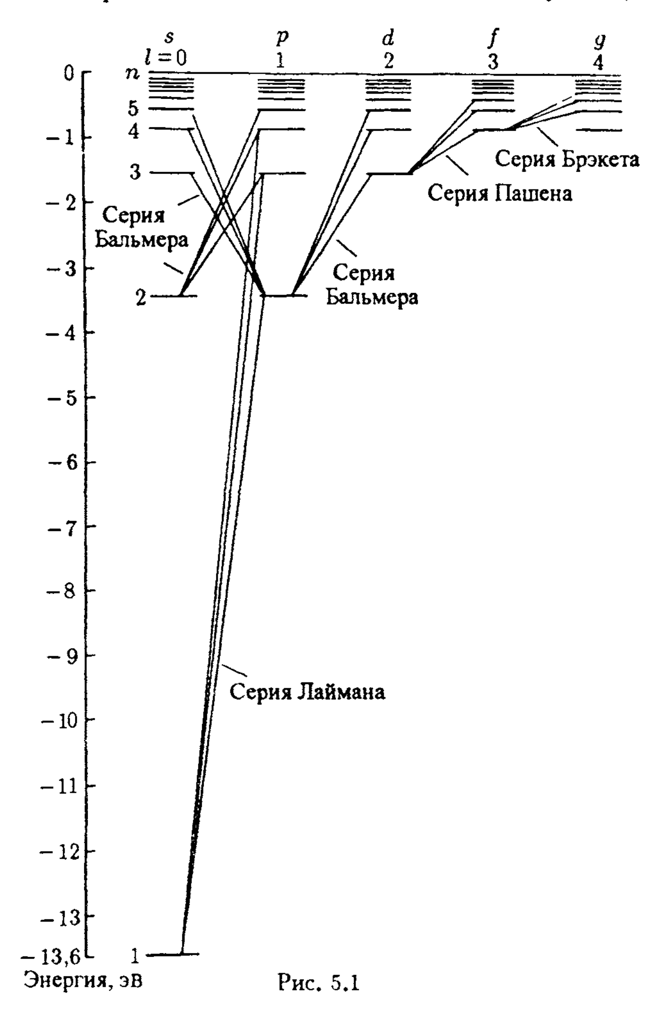



Рис. 5.1

вращаясь из возбужденного в основное состояние), или за счет столкновения атома с достаточно быстрым электроном, или, наконец, за счет поглощения атомом фотона.

Фотон при поглощении его атомом исчезает, передавая атому всю свою энергию. Атом не может поглотить только

часть фотона, ибо фотон, как электрон и как другие элементарные частицы, является неделимым. Поэтому в отсутствие многофотонных процессов (см. § 5.17) атом может поглощать только те фотоны, энергия которых в точности [2]) соответствует разности энергий двух его уровней. Поскольку поглощающий атом обычно находится в основном состоянии, спектр поглощения водородного атома должен состоять из линий, соответствующих переходам

$$1s \to np \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Этот результат полностью согласуется с опытом.

Собственные функции уравнения (5.2) распадаются на два множителя, один из которых зависит только от $r$, а другой — только от углов $\vartheta$ и $\varphi$:

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{5.6}$$

Множитель $R_{nl}(r)$ вещественный и зависит от квантовых чисел $n$ и $l$, множитель $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ комплексный и зависит от квантовых чисел $l$ и $m$.

Функция $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ представляет собой собственную функцию оператора квадрата момента импульса. Для $s$-состояний электрона (т. е. для состояний с моментом импульса, равным нулю) эта функция является константой, так что пси-функции вида $\psi_{n00}$ зависят только от $r$.

Элемент объема в сферической системе координат, равный $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$, можно представить в виде $dV = r^2\, dr\, d\Omega$, где $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ есть элемент телесного угла. Поэтому условие нормировки функций (5.6) можно написать следующим образом:

$$\int \psi^*_{nlm} \psi_{nlm}\, dV = \int_0^\infty R^2_{nl} r^2\, dr \int_{(4\pi)} Y^*_{lm} Y_{lm}\, d\Omega = 1 \tag{5.7}$$

(интеграл по $d\Omega$ берется по полному телесному углу, равному $4\pi$). Собственные функции оператора $\widehat{\mathbf{M}}^2$ предполагаются нормированными; это означает, что

$$\int_{(4\pi)} Y^*_{lm} Y_{lm}\, d\Omega = 1. \tag{5.8}$$

[2]) Вернее, с точностью до небольшой поправки, которая будет введена в § 5.3.

Следовательно, из (5.7) вытекает условие нормировки функций $R_{nl}(r)$:

$$\int_0^\infty R_{nl}^2 r^2\, dr = 1. \tag{5.9}$$

Вероятность нахождения электрона в элементе объема $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = r^2\, dr\, d\Omega$ определяется выражением

$$dP_{r,\vartheta,\varphi} = R_{nl}^2\, r^2\, dr\, Y_{lm}^* Y_{lm}\, d\Omega.$$

Проинтегрировав это выражение по полному телесному углу $4\pi$, мы найдем вероятность $dP_r$ того, что электрон окажется в тонком шаровом слое радиуса $r$ и толщины $dr$:

$$dP_r = R_{nl}^2\, r^2\, dr \int_{(4\pi)} Y_{lm}^* Y_{lm}\, d\Omega.$$

Приняв во внимание условие (5.8), получим формулу

$$dP_r = R_{nl}^2\, r^2\, dr. \tag{5.10}$$

Из этой формулы следует, что выражение $R_{nl}^2 r^2$ представляет собой плотность вероятности нахождения электрона на расстоянии $r$ от ядра. На рис. 5.2 приведены графики плотности вероятности для атома водорода ($Z = 1$) для состояний: 1) $n = 1$, $l = 0$, 2) $n = 2$, $l = 1$ и 3) $n = 3$, $l = 2$. За единицу масштаба для оси $r$ принят боровский радиус $r_0$ (см. (3.30)). Длинными вертикальными черточками отмечены на графиках радиусы соответствующих боровских орбит. Из рисунка видно, что эти радиусы совпадают с наиболее вероятными расстояниями электрона от ядра.

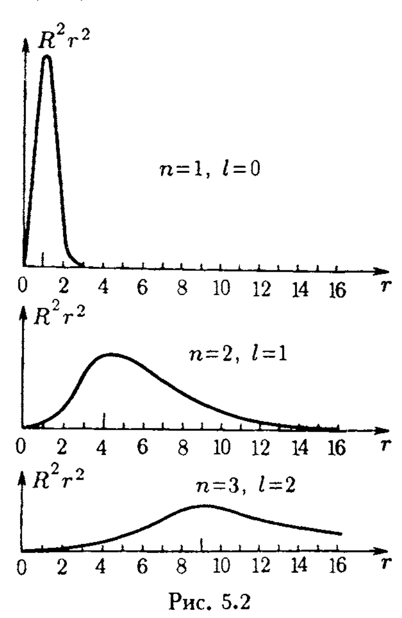



Рис. 5.2

## 5.2. Спектры щелочных металлов

Спектры испускания атомов щелочных металлов, подобно спектру водорода, состоят из нескольких серий линий. Наиболее интенсивные из них получили названия: главная, резкая, диффузная и основная (или серия Бергмана). Эти названия имеют следующее происхождение. Главная серия названа так потому, что наблюдается и при поглощении. Следовательно, она соответствует переходам атома в основное состояние. Резкая и диффузная серии состоят соответственно из резких и размытых (диффузных) линий. Серия Бергмана была названа основной (фундаментальной) за свое сходство с сериями водорода.

Линии серий атома Na можно представить как переходы между энергетическими уровнями, изображенными на рис. 5.3. Эта схема отличается от схемы уровней водородного атома (см. рис. 5.1) тем, что аналогичные уровни в различных рядах лежат на неодинаковой высоте. Несмотря на это отличие, обе схемы обнаруживают большое сходство. Это сходство дает основание предположить, что спектры щелочных металлов испускаются при переходах самого внешнего (так называемого валентного, или оптического) электрона с одного уровня на другой.

Из рис. 5.3 видно, что энергия состояния оказывается зависящей, кроме квантового числа $n$, также от того, в какой ряд попадает данный терм, т. е. от номера ряда термов. На схеме уровней атома водорода различные ряды термов (с совпадающими по высоте уровнями) отличаются значениями момента импульса электрона. Естественно предположить, что различные ряды термов щелочных металлов также отличаются значениями момента импульса валентного электрона. Поскольку уровни различных рядов в этом случае лежат на неодинаковой высоте, следует принять, что энергия валентного электрона в атоме щелочного металла зависит от момента импульса электрона (чего мы не наблюдали для водорода).

Предположение о зависимости энергии валентного электрона щелочных атомов от квантового числа $l$ (т. е. от значения $M$) подтверждается квантово-механическими расчетами. В более сложных, чем водород, атомах можно считать, что каждый из электронов движется в усредненном поле ядра и остальных электронов. Это поле уже не будет кулоновским (т. е. пропорциональным $1/r^2$), но обладает

центральной симметрией (зависит только от $r$). В самом деле, в зависимости от степени проникновения электрона в глубь атома заряд ядра будет для данного электрона в большей или меньшей степени экранироваться другими электронами, так что эффективный заряд, воздействую-

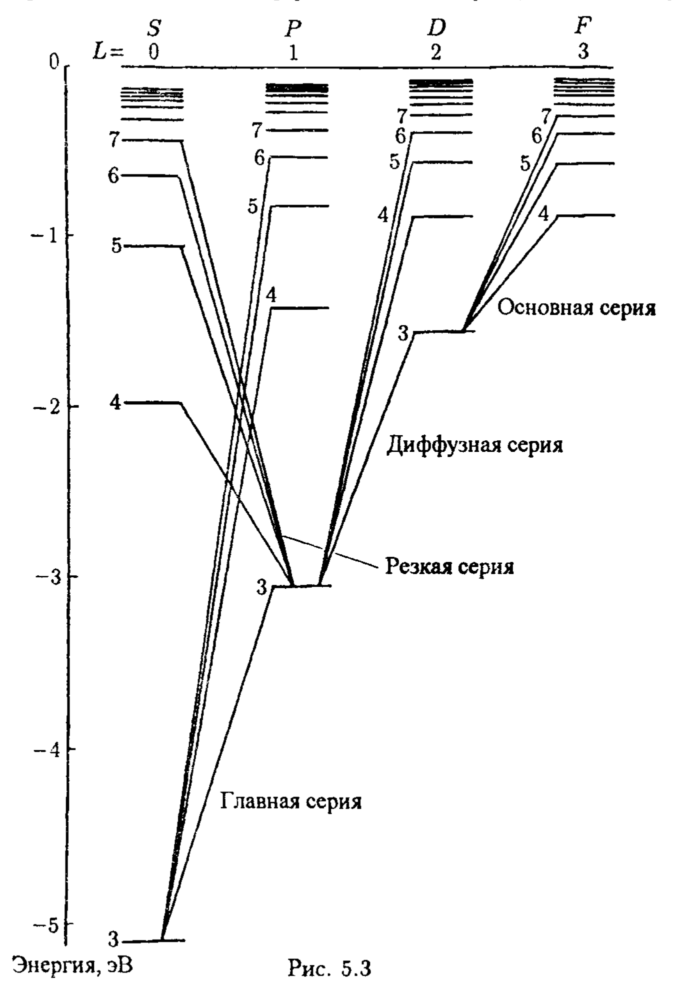



Рис. 5.3

щий на рассматриваемый электрон, не будет постоянным. Вместе с тем, поскольку электроны движутся в атоме с огромными скоростями, усредненное по времени поле можно считать центрально-симметричным.

Решение уравнения Шрёдингера для электрона, движущегося в центрально-симметричном некулоновском поле, дает результат, аналогичный результату для водородного атома, с тем отличием, что энергетические уровни зависят не только от квантового числа $n$, но и от квантового числа $l$: $E = E_{nl}$. Таким образом, в этом случае снимается вырождение по $l$. Отличие в энергии между состояниями с различными $l$ и одинаковыми $n$ вообще не так велико, как между состояниями с различными $n$. С увеличением $l$ энергия уровней с одинаковыми $n$ возрастает.

Момент импульса атома в целом слагается из моментов всех электронов, входящих в состав атома. Значение результирующего момента определяется квантовым числом $L$ (см. § 4.7). Каждому столбцу уровней на рис. 5.3 соответствует свое значение $L$.

Использованные на схеме рис. 5.3 обозначения $S$, $P$, $D$, $F$ являются первыми буквами английских названий серий: sharp — резкий, principal — главный, diffuse — размытый, fundamental — основной. Каждая из серий возникает за счет переходов с уровней, принадлежащих соответствующему ряду. После того как было выяснено, что различные ряды уровней отличаются значением квантового числа $L$, обозначения $S$, $P$, $D$, $F$ (или $s$, $p$, $d$, $f$) были применены для обозначения состояний с соответствующими значениями $L$ (или $l$).

Исследования оптических спектров ионов щелочных металлов показали, что момент импульса атомного остатка (т. е. ядра и остальных электронов, кроме наименее связанного валентного электрона, удаляющегося при ионизации) равен нулю. Следовательно, момент атома щелочного металла равен моменту его валентного электрона, и $L$ атома совпадает с $l$ этого электрона.

Для $l$ валентного электрона атомов щелочных металлов действует такое же правило отбора, как и для $l$ электрона водородного атома (см. формулу (5.5)).

При возбуждении атома щелочного металла и при испускании им света изменяется только состояние валентного электрона. Поэтому схему уровней щелочного атома можно считать тождественной схеме уровней валентного электрона [3]).

[3]) Причины, по которым основному состоянию валентного электрона атома Na мы приписали значение главного квантового числа, равное 3 (см. рис. 5.3), выяснятся в дальнейшем.

Обозначим термы, отвечающие столбцам уровней, помеченным на рис. 5.3 буквами $S$, $P$, $D$ и $F$, символами $nS$, $nP$, $nD$ и $nF$. Согласно формуле (3.6) частота спектральной линии равна разности термов конечного и начального состояний.

Следовательно, спектральные серии натрия могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\text{резкая серия:} && \omega = 3P - nS && (n = 4, 5, \ldots),\\ &\text{главная серия:} && \omega = 3S - nP && (n = 3, 4, \ldots),\\ &\text{диффузная серия:} && \omega = 3P - nD && (n = 3, 4, \ldots),\\ &\text{основная серия:} && \omega = 3D - nF && (n = 4, 5, \ldots). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Еще в конце прошлого столетия Ридберг установил, что термы щелочных металлов с большой степенью точности можно представить с помощью эмпирической формулы

$$T(n) = \frac{R}{(n+\alpha)^2}. \tag{5.12}$$

Здесь $R$ — постоянная Ридберга (см. (3.3)), $n$ — главное квантовое число, $\alpha$ — дробное число, называемое ридберговской поправкой или квантовым дефектом. Эта поправка имеет постоянное значение для данного ряда термов. Ее принято обозначать той же буквой, какой обозначен соответствующий ряд термов, — буквой $s$ для $S$-термов, буквой $p$ — для $P$-термов и т. д. Значения поправок определяются экспериментально. Для разных щелочных металлов они имеют различные значения. Для натрия эти значения равны

$$s = -1,35, \quad p = -0,87, \quad d = -0,01, \quad f = 0,00. \tag{5.13}$$

Заметим, что терм (5.12) отличается от терма водородного атома (см. (3.5)) только наличием поправки $\alpha$. Для $F$-термов эта поправка равна нулю. Поэтому основная серия (возникающая при переходах с $F$-уровней) оказывается водородоподобной.

Подставив эмпирические выражения в соотношения (5.11), получим формулы для частот спектральных серий

натрия:

резкая серия: $\omega = \dfrac{R}{(3+p)^2} - \dfrac{R}{(n+s)^2}$ $(n = 4, 5, \ldots)$,

главная серия: $\omega = \dfrac{R}{(3+s)^2} - \dfrac{R}{(n+p)^2}$ $(n = 3, 4, \ldots)$,

диффузная серия: $\omega = \dfrac{R}{(3+p)^2} - \dfrac{R}{(n+d)^2}$ $(n = 3, 4, \ldots)$,

основная серия: $\omega = \dfrac{R}{(3+d)^2} - \dfrac{R}{(n+f)^2}$ $(n = 4, 5, \ldots)$.

Поправки $s$, $p$, $d$, $f$ в этих формулах имеют значения (5.13).

## 5.3. Ширина спектральных линий

Из возбужденного состояния атом может перейти спонтанно (самопроизвольно) в более низкое энергетическое состояние. Время $\tau$, за которое число атомов, находящихся в данном возбужденном состоянии, уменьшается в $e$ раз, называется временем жизни возбужденного состояния [4]). Время жизни возбужденных состояний атомов имеет порядок $10^{-8}$–$10^{-9}$ с. Время жизни метастабильных состояний может достигать десятых долей секунды.

Возможность спонтанных переходов указывает на то, что возбужденные состояния нельзя рассматривать как

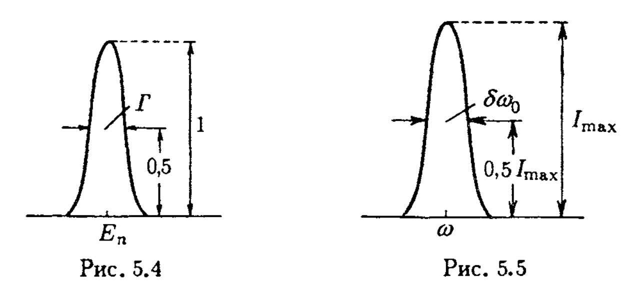



Рис. 5.4 Рис. 5.5

строго стационарные. В соответствии с этим энергия возбужденного состояния не является точно определенной,

[4]) Определенное таким образом время жизни совпадает со средним временем пребывания атомов в возбужденном состоянии.

и возбужденный энергетический уровень имеет конечную ширину $\Gamma$ (рис. 5.4). Согласно формуле (4.5) неопределенность энергии $\Gamma$ связана со временем жизни состояния $\tau$ соотношением $\Gamma\tau \sim \hbar$. Следовательно, ширина уровня определяется выражением

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \tag{5.14}$$

(для определенности мы написали знак равенства).

Основное состояние атома стационарно (из него невозможен спонтанный переход в другие состояния). Поэтому энергия основного состояния является определенной вполне точно.

Вследствие конечной ширины возбужденных уровней энергия испускаемых атомами фотонов имеет разброс, описываемый кривой, изображенной на рис. 5.4. Соответственно спектральная линия (рис. 5.5) обладает конечной шириной[5]):

$$\delta\omega_0 = \frac{\Gamma}{\hbar} = \frac{1}{\tau}. \tag{5.15}$$

Взяв $\tau$ порядка $10^{-8}$ с, получим для $\delta\omega_0$ значение порядка $10^8$ с$^{-1}$.

Интервал частот $\delta\omega_0$ связан с интервалом длин волн $\delta\lambda_0$ соотношением

$$\delta\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega^2}\delta\omega_0 = \frac{\lambda}{\omega}\delta\omega_0 = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\delta\omega_0 \tag{5.16}$$

(знак минус мы опустили). Подставив $\lambda = 5000$ Å и $\delta\omega_0 = 10^8$ с$^{-1}$, получим для $\delta\lambda_0$ значение порядка $10^{-4}$ Å.

Выражения (5.15) и (5.16) определяют так называемую е с т е с т в е н н у ю  ш и р и н у спектральной линии. Естественная ширина характеризуется значениями

$$\delta\omega_0 \sim 10^8 \text{ с}^{-1}, \quad \delta\lambda_0 \sim 10^{-4} \text{ Å}. \tag{5.17}$$

Тепловое движение излучающих атомов приводит к так называемому д о п л е р о в с к о м у  р а с ш и р е н и ю

---

[5]) Ширина спектральной линии $\delta\omega$ определяется как разность частот, которым соответствует интенсивность, равная половине интенсивности в максимуме. В связи с этим $\delta\omega$ называют иногда п о л у ш и р и н о й спектральной линии. Мы будем пользоваться термином «ширина линии».

спектральных линий. Пусть в момент испускания фотона атом обладает импульсом $\mathbf{p}_0$ и соответственно энергией поступательного движения $p_0^2/2m_a$ ($m_a$ — масса атома). Фотон уносит с собой импульс $\hbar\mathbf{k}$, равный по модулю $\hbar\omega/c$. Поэтому импульс атома изменяется и становится равным $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \hbar\mathbf{k}$. Следовательно, изменяется и энергия поступательного движения атома. Атом получает энергию отдачи, равную

$$E_{\text{отд}} = \frac{(\mathbf{p}_0 - \hbar\mathbf{k})^2}{2m_a} - \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m_a} = \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m_a} - \frac{\mathbf{p}_0\hbar\mathbf{k}}{m_a}. \tag{5.18}$$

Заменим $k$ на $\omega/c$. Кроме того, учтем, что $\mathbf{p}_0/m_a$ есть скорость атома $\mathbf{v}_0$ до излучения. В результате выражение (5.18) примет вид

$$E_{\text{отд}} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_a c^2} - \frac{v_0}{c}\hbar\omega\cos\alpha, \tag{5.19}$$

где $\alpha$ — угол между векторами $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{k}$, т. е. угол между направлением движения атома и направлением, в котором испускается фотон.

Обозначим через $\Delta E_{nm}$ убыль внутренней энергии атома, т. е. разность $E_n - E_m$, где $E_n$ и $E_m$ — значения энергии уровней, между которыми совершается переход. На основании закона сохранения энергии $\Delta E_{nm}$ должно равняться сумме энергии фотона и энергии отдачи, приобретаемой атомом при излучении:

$$\Delta E_{nm} = \hbar\omega + E_{\text{отд}}. \tag{5.20}$$

Если бы атомы при излучении не испытывали отдачи, они испускали бы фотоны частоты $\omega_0$. Значение этой частоты получается из условия

$$\hbar\omega_0 = \Delta E_{nm}. \tag{5.21}$$

Отметим, что в предыдущих параграфах под $\omega$ подразумевалась $\omega_0$.

Энергия отдачи составляет для видимого света примерно $10^{-11}$ от энергии испускаемого фотона. Для $\gamma$-квантов с $\hbar\omega = 100$ кэВ энергия отдачи в $10^6$ раз меньше энергии фотона. Поэтому в формуле (5.19) можно заменить $\omega$ на $\omega_0$. Скорость $v_0$ положим равной средней скорости $v$ теплового движения молекул. В результате получим, что

$$E_{\text{отд}} = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2m_a c^2} - \frac{v}{c}\hbar\omega_0\cos\alpha. \tag{5.22}$$

Среднее значение этого выражения равно первому слагаемому ($\cos\alpha$ принимает с равной вероятностью все значения от $-1$ до $+1$, вследствие чего второе слагаемое в среднем равно нулю).

Итак, обозначив среднюю энергию отдачи, приобретаемую атомом при испускании фотона, буквой $R$, можно написать

$$R = \langle E_{\text{отд}} \rangle = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2m_a c^2} = \frac{\Delta E_{nm}^2}{2m_a c^2}. \tag{5.23}$$

С учетом (5.23) выражение (5.22) можно представить в виде

$$E_{\text{отд}} = R - \frac{v}{c}\hbar\omega_0 \cos_\alpha . \tag{5.24}$$

Из формул (5.20) и (5.21) вытекает, что

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 - E_{\text{отд}}.$$

Подставив сюда выражение (5.24) для $E_{\text{отд}}$ и разделив получившееся соотношение на $\hbar$, придем к формуле

$$\omega = \omega_0 - \frac{R}{\hbar} + \frac{v}{c}\omega_0 \cos\alpha. \tag{5.25}$$

Введем обозначения:

$$\Delta\omega_R = \frac{R}{\hbar} = \frac{\hbar\omega_0^2}{2m_a c^2} \approx \frac{\hbar\omega^2}{2m_a c^2}, \tag{5.26}$$

$$\delta\omega_D = 2\frac{v}{c}\omega_0 \approx 2\frac{v}{c}\omega. \tag{5.27}$$

Воспользовавшись этими обозначениями, представим формулу (5.25) в виде

$$\omega = \omega_0 - \Delta\omega_R + \frac{1}{2}\delta\omega_D \cos\alpha. \tag{5.28}$$

В источнике излучения, в котором все направления теплового движения атомов равновероятны, частоты излучаемых фотонов будут заключены в пределах интервала $\delta\omega_D$. Следовательно, выражение (5.27) дает *доплеровскую ширину* спектральной линии. Из (5.27) вытекает, что относительное доплеровское уширение линий $\delta\omega_D/\omega$ не зависит от частоты и равно $2(v/c)$ (ср. с формулой (8.15) кн. 4, приняв во внимание, что $\Delta\omega$ в этой формуле соответствует половине $\delta\omega_D$).

Согласно (5.16) $\delta\lambda/\lambda = \delta\omega/\omega$. Средняя скорость атомов (с относительной атомной массой порядка 100) при температуре порядка нескольких тысяч кельвин составляет приблизительно $10^3$ м/с. В этих условиях доплеровская ширина спектральной линии для $\lambda = 5000$ Å будет равна

$$\delta\lambda_D = 2\frac{v}{c}\lambda = 2\frac{10^3}{3\cdot 10^8}\cdot 5000\ \text{Å} \approx 3\cdot 10^{-2}\ \text{Å}$$

(ср. с (5.17)).

Действительная ширина спектральной линии $\delta\omega$ слагается из естественной ширины (5.15) и доплеровской ширины (5.27):

$$\delta\omega = \delta\omega_0 + \delta\omega_D.$$

Середина линии приходится на частоту $\omega_0 - \Delta\omega_R$ (см. (5.28)). Величина $\omega_0$ представляет собой ту частоту, которую имел бы фотон при условии, что энергия $\Delta E_{nm}$ полностью пошла на излучение. Получение атомом при излучении энергии отдачи $R$ приводит к смещению спектральной линии в сторону меньших частот (т. е. бóльших длин волн) на величину $\Delta\omega_R$, определяемую формулой (5.26). Из этой формулы следует, что относительное смещение частоты $\Delta\omega_R/\omega$ оказывается пропорциональным частоте $\omega$.

Оценим $\Delta\omega_R$ для видимого света ($\omega \approx 3\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$). Массу атома положим равной $10^{-22}$ г (атомная масса порядка 100). По формуле (5.26)

$$\Delta\omega_R = \frac{1,05\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{30}}{2\cdot 10^{-22}\cdot 9\cdot 10^{20}}\ \text{с}^{-1} \approx 5\cdot 10^4\ \text{с}^{-1},$$

откуда для $\Delta\lambda_R$ получается значение порядка $10^{-7}$ Å, которым вполне можно пренебречь.

Заметим, что при поглощении атомом фотона $\hbar\omega$ импульс фотона $\hbar\mathbf{k}$ сообщается атому, вследствие чего атом приходит в поступательное движение. Средняя дополнительная энергия, получаемая атомом при поглощении фотона, совпадает со средним значением энергии отдачи $R$. Следовательно, для того чтобы вызвать в атоме переход $E_m \to E_n$, фотон должен обладать энергией

$$\hbar\omega' = \Delta E_{nm} + R,$$

а частота фотона должна быть равна $\omega' = \omega_0 + \Delta\omega_R$, где $\Delta\omega_R$ определяется формулой (5.26).

Итак, спектральная линия, середина которой лежит в спектре испускания данного атома при частоте $\omega_0 - \Delta\omega_R$, в спектре поглощения того же атома будет иметь частоту $\omega_0 + \Delta\omega_R$. Для видимого света смещение линий испускания и поглощения относительно друг друга (составляющее $2\Delta\lambda_R \approx 10^{-7}$ Å) на пять порядков меньше доплеровской ширины линии (равной $3 \cdot 10^{-2}$ Å) и на три порядка меньше естественной ширины линии (равной $\sim 10^{-4}$ Å). Следовательно, для видимого света линии испускания и поглощения можно считать точно совмещенными друг с другом.

## 5.4. Мультиплетность спектров и спин электрона

Исследование спектров щелочных металлов при помощи приборов с большой разрешающей силой показало, что каждая линия этих спектров является двойной (дублет). Так, например, характерная для натрия желтая линия $3P \to 3S$ (см. рис. 5.3) состоит из двух линий с длинами волн 5890 и 5896 Å. То же относится и к другим линиям главной серии, а также к линиям других серий.

Структура спектра, отражающая расщепление линий на компоненты, называется тонкой структурой. Сложные линии, состоящие из нескольких компонент, получили название мультиплетов. Тонкая структура обнаруживается, кроме щелочных металлов, также и у других элементов, причем число компонент в мультиплете может быть равно двум (дублеты), трем (триплеты), четырем (квартеты), пяти (квинтеты) и т. д. В частном случае спектральные линии даже с учетом тонкой структуры могут быть одиночными (синглеты).

Расщепление спектральных линий, очевидно, обусловлено расщеплением энергетических уровней. Для объяснения расщепления уровней Гаудсмит[6]) и Уленбек[7]) выдвинули в 1925 г. гипотезу о том, что электрон обладает собственным моментом импульса $M_s$, не связанным с дви-

---

[6]) Сэмюэл Абрахам Гаудсмит (1902–1979) — американский физик.

[7]) Джордж Юджин Уленбек (1900–1974) — американский физик, по национальности голландец, с 1927 г. — в США.

жением электрона в пространстве. Этот собственный момент был назван **спином**.

Первоначально предполагалось, что спин обусловлен вращением электрона вокруг своей оси. Согласно этим представлениям электрон уподоблялся волчку или веретену. Кстати, отсюда происходит и сам термин «спин»: по-английски spin означает «верчение». Однако очень скоро пришлось отказаться от подобных модельных представлений, в частности, по следующей причине. Вращающийся заряженный шарик должен обладать магнитным моментом, причем отношение магнитного момента к механическому должно иметь значение

$$\frac{\mu}{M} = -\frac{e}{2m_e c} \tag{5.29}$$

(см. формулу (7.41) кн. 2).

Действительно, было установлено, что электрон, наряду с собственным механическим моментом, обладает также и собственным магнитным моментом $\mu_s$. Однако ряд опытных фактов, в частности сложный эффект Зеемана, свидетельствует о том, что отношение собственных магнитного и механического моментов в два раза больше, чем для орбитальных моментов:

$$\frac{\mu_s}{M_s} = -\frac{e}{m_e c}. \tag{5.30}$$

Таким образом, представление об электроне как о вращающемся шарике оказалось несостоятельным. Спин следует считать внутренним свойством, присущим электрону, подобно тому как ему присущи заряд и масса.

Предположение о спине электрона было подтверждено большим количеством опытных фактов и должно считаться совершенно доказанным. Оказалось также, что наличие спина и все его свойства автоматически вытекают из установленного Дираком уравнения квантовой механики, удовлетворяющего требованиям теории относительности. Таким образом, выяснилось, что спин электрона является свойством одновременно квантовым и релятивистским. Спином обладают также протоны, нейтроны, фотоны и другие элементарные частицы (кроме мезонов).

Модуль собственного момента импульса электрона определяется по общим законам квантовой механики (см. формулу (4.34)) так называемым **спиновым кванто-**

вым числом $s$, равным 1/2 [8]):

$$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{3}. \quad (5.31)$$

Проекция спина на заданное направление может принимать квантованные значения, отличающиеся друг от друга на $\hbar$:

$$M_{sz} = m_s\hbar \quad (m_s = \pm s = \pm 1/2). \quad (5.32)$$

Чтобы найти значение собственного магнитного момента электрона, умножим $M_s$ на отношение $\mu_s$ к $M_s$ (см. (5.30)):

$$\mu_s = -\frac{e}{m_e c}M_s = -\frac{e\hbar}{m_e c}\sqrt{s(s+1)} =$$

$$= -2\mu_Б\sqrt{s(s+1)} = -\mu_Б\sqrt{3} \quad (5.33)$$

($\mu_Б$ — магнетон Бора; см. формулу (7.45) кн. 2). Знак минус указывает на то, что механический $M_s$ и магнитный $\mu_s$ моменты электрона направлены в противоположные стороны.

Проекция собственного магнитного момента электрона на заданное направление может иметь следующие значения:

$$\mu_{sz} = -\frac{e}{m_e c}M_{sz} = -\frac{e}{m_e c}\hbar m_s = -\frac{e\hbar}{m_e c}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \mp\mu_Б \quad (5.34)$$

(минус получается, если $m_s = +1/2$, плюс — если $m_s = -1/2$).

Таким образом, проекция собственного момента импульса электрона может принимать значения $+\hbar/2$ и $-\hbar/2$, а собственного магнитного момента — значения $+\mu_Б$ и $-\mu_Б$. В ряд формул, в частности в выражение для энергии, входят не сами моменты, а их проекции. Поэтому принято говорить, что собственный механический момент (спин) электрона равен половине (подразумевается, в единицах $\hbar$), а собственный магнитный момент равен одному магнетону Бора.

[8]) Для протона и нейтрона $s$ также равно половине, для фотона $s$ равно единице.

Рассмотрим теперь на примере атома натрия, как существование спина электрона может объяснить мультиплетную структуру спектра. Поскольку момент атомного остатка равен нулю, момент атома натрия равен моменту валентного электрона. Момент же электрона будет слагаться из двух моментов, орбитального $M_l$, обусловленного движением электрона в атоме, и спинового $M_s$, не связанного с движением электрона в пространстве. Результирующая этих двух моментов дает полный момент импульса валентного электрона. Сложение орбитального и спинового моментов в полный момент осуществляется по тем же квантовым законам, по которым складываются орбитальные моменты разных электронов (см. формулы (4.39) и (4.40)). Модуль полного момента $M_j$ определяется квантовым числом $j$:

$$M_j = \hbar\sqrt{j(j+1)},$$

причем $j$ может иметь значения

$$j = l + s, \ |l - s|,$$

где $l$ и $s$ — соответственно азимутальное и спиновое квантовые числа. При $l = 0$ квантовое число $j$ имеет только одно значение: $j = s = 1/2$. При $l$, отличном от нуля, возможны два значения: $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$, которые соответствуют двум возможным взаимным ориентациям моментов $M_l$ и $M_s$ — «параллельной» и «антипараллельной»[9]).

Теперь учтем, что с механическими моментами связаны магнитные моменты, которые взаимодействуют друг с другом подобно тому, как взаимодействуют два тока или две магнитные стрелки. Энергия этого взаимодействия (называемого *спин-орбитальным взаимодействием*) зависит от взаимной ориентации орбитального и собственного моментов. Следовательно, состояния с различными $j$ должны обладать различной энергией.

Таким образом, каждый терм ряда $P$ ($l = 1$) расщепляется на два, соответствующих $j = 1/2$ и $j = 3/2$; каждый терм ряда $D$ ($l = 2$) расщепляется на термы с $j = 3/2$ и

---

[9]) Термины «параллельный» и «антипараллельный» взяты в кавычки, поскольку два складываемых момента никогда не бывают направленными вдоль одной прямой.

$j = 5/2$ и т. д. Каждому терму ряда $S$ $(l = 0)$ соответствует только одно значение $j = 1/2$; поэтому термы ряда $S$ не расщепляются.

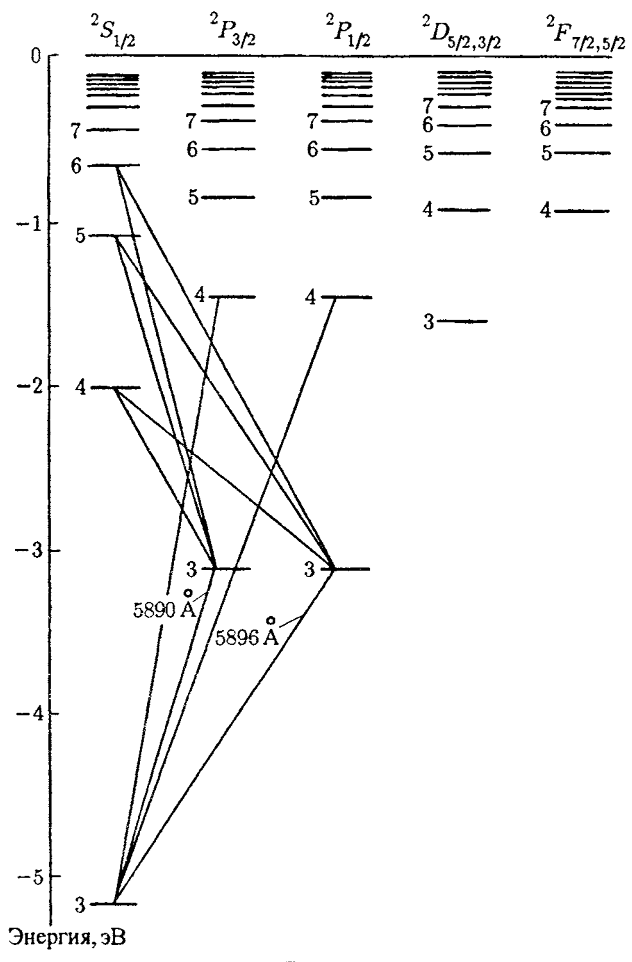



Рис. 5.6

Итак, каждый ряд термов, кроме $S$, распадается на два ряда — структура термов оказывается дублетной (двойной). Термы принято обозначать символами:

$$^2S_{1/2},\ ^2P_{3/2},\ ^2P_{1/2},\ ^2D_{5/2},\ ^2D_{3/2},\ ^2F_{7/2},\ ^2F_{5/2},\ \ldots$$

Правый нижний индекс дает значение $j$. Верхний левый

индекс указывает мультиплетность термов. Хотя ряд $S$ является одиночным, при символе терма также ставится 2, чтобы показать, что этот ряд принадлежит к системе термов, в целом дублетной.

С учетом тонкой структуры схема термов выглядит более сложно, о чем дают представление схемы уровней натрия (рис. 5.6) и цезия (рис. 5.7). Схему для натрия сле-

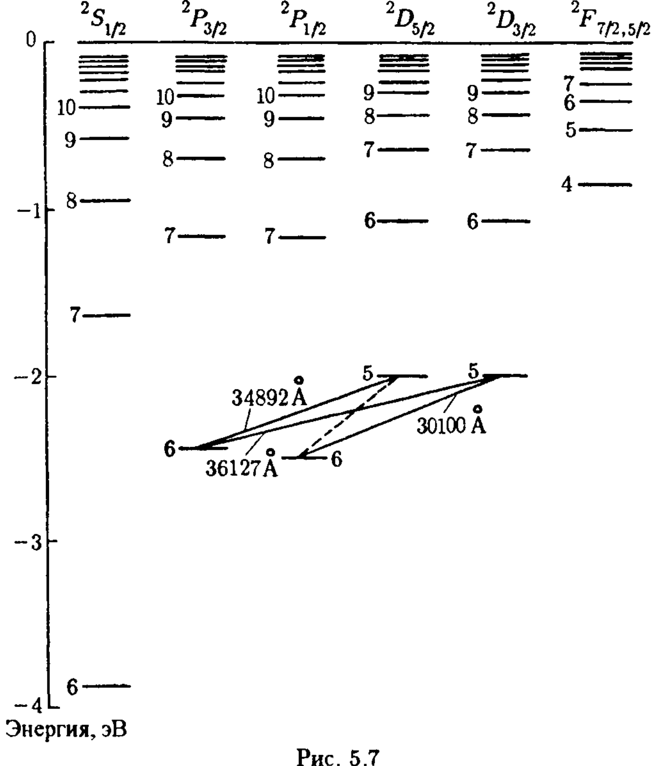



Рис. 5.7

дует сравнить со схемой, изображенной на рис. 5.3. Поскольку мультиплетное расщепление термов $D$ и $F$ для натрия очень мало, подуровни $D$ и $F$, различающиеся значениями $j$, изображены на схеме слитно.

Для квантового числа полного момента импульса атома имеется правило отбора

$$\Delta j = 0, \pm 1. \tag{5.35}$$

Мультиплетное расщепление у цезия значительно больше, чем у натрия. На схеме цезия видно, что тонкая структура диффузной серии состоит не из двух линий, а из трех:

$$5\,{}^2D_{3/2} \to 6\,{}^2P_{3/2} \sim 36\,127\ \text{Å},$$
$$5\,{}^2D_{5/2} \to 6\,{}^2P_{3/2} \sim 34\,892\ \text{Å},$$
$$5\,{}^2D_{3/2} \to 6\,{}^2P_{1/2} \sim 30\,100\ \text{Å}.$$

Возникновение этих линий пояснено дополнительно на рис. 5.8. Изображенный штриховой линией переход $5\,{}^2D_{5/2} \to 6\,{}^2P_{1/2}$ запрещен правилом отбора (5.35). В нижней части схемы показано, как выглядит сам мультиплет. Толщина линий на схеме примерно соответствует интенсивности спектральных линий. Совокупность получающихся линий выглядит как дублет, у которого одна из компонент в свою очередь оказывается двойной. Такая группа линий называется не триплетом, а *сложным дублетом*, так как она возникает в результате комбинации дублетных термов.


Рис. 5.8

Заметим, что в связи с существованием спина электрона естественно возникает вопрос о том, что и у водородного атома уровни с $l > 0$ должны быть двойными, а спектральные линии — дублетными. Тонкая структура водородного спектра действительно была обнаружена экспериментально.

Обусловленное спином расщепление энергетических уровней является релятивистским эффектом. Релятивистская квантовая теория дает для расстояния между уровнями тонкой структуры $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ водородного атома значение

$$\Delta E = \frac{\alpha^2}{16} E_i. \tag{5.36}$$

Здесь $E_i$ — энергия ионизации водородного атома (вычисленная в предположении, что масса ядра бесконечно велика), $\alpha$ — безразмерная величина, называемая *постоянной тонкой структуры*. Она определяется выражением

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \tag{5.37}$$

С помощью формулы (5.36) можно оценить мультиплетное расщепление уровней. Расстояния между уровнями, отличающимися значениями главного квантового числа, порядка $E_i$; выражение $\alpha^2/16$ имеет значение порядка $10^{-5}$. Следовательно, расстояние между уровнями тонкой структуры примерно в $10^5$ раз меньше, чем расстояние между основными уровнями.

Постоянная тонкой структуры принадлежит к числу фундаментальных констант природы. Ее смысл становится очевидным при переходе к так называемой естественной системе единиц, применяемой в квантовой электродинамике. В этой системе в качестве единицы массы принимается масса электрона $m_e$, в качестве единицы длины — комптоновская длина волны электрона $\lambda_C = \hbar/(m_e c)$ (см. § 2.4), в качестве единицы энергии — энергия покоя электрона $m_e c^2$ и т. д. Вычислим в этих единицах электрическую энергию взаимодействия двух электронов, находящихся на расстоянии $\hbar/(m_e c)$ друг от друга. Для этого нужно выражение $e^2/(\hbar/m_e c)$ разделить на $m_e c^2$. В результате получится безразмерная величина, равная

$$\frac{e^2/(\hbar/m_e c)}{m_e c^2} = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \qquad (5.38)$$

(см. формулу (5.37)). Если бы мы заряд электрона $q$ выражали в естественных единицах, то формула для энергии взаимодействия имела бы вид

$$\frac{q\,(\text{ест. ед.})\; q\,(\text{ест. ед.})}{1\,\text{ест. ед. длины}} = \alpha\,\text{ест. ед. энергии.}$$

Отсюда следует, что $\alpha$ представляет собой квадрат элементарного заряда, выраженного в естественных единицах.

Согласно (5.38) постоянная тонкой структуры характеризует энергию взаимодействия двух электронов. Иначе можно сказать, что $\alpha$ определяет, как сильно электрон связан с электромагнитным полем. По этой причине постоянную $\alpha$ называют константой связи электрона с электромагнитным полем.

В выражение (5.38) для $\alpha$ масса электрона не входит. Следовательно, $\alpha$ является константой связи с электромагнитным полем для любой элементарной частицы, имеющей заряд $e$.

## 5.5. Результирующий механический момент многоэлектронного атома

Каждый электрон в атоме обладает орбитальным моментом импульса $M_l$ и собственным моментом $M_s$. Механические моменты связаны с соответствующими магнитными моментами, вследствие чего между всеми $M_l$ и $M_s$ имеется взаимодействие.

Моменты $M_l$ и $M_s$ складываются в результирующий момент атома $M_J$. При этом возможны два случая.

1. Моменты $M_l$ взаимодействуют между собой сильнее, чем с $M_s$, которые в свою очередь сильнее связаны друг с другом, чем с $M_l$. Вследствие этого все $M_l$ складываются в результирующую $M_L$, моменты $M_s$ складываются в $M_S$, а затем уже $M_L$ и $M_S$ дают суммарный момент атома $M_J$. Такой вид связи встречается чаще всего и называется связью Рёссель–Саундерса или $LS$-связью.

2. Каждая пара $M_l$ и $M_s$ взаимодействует между собой сильнее, чем с другими $M_l$ и $M_s$, вследствие чего образуются результирующие $M_j$ для каждого электрона в отдельности, которые затем уже объединяются в $M_J$ атома. Такой вид связи, называемый $jj$-связью, наблюдается у тяжелых атомов.

Сложение моментов осуществляется по квантовым законам (см. § 4.7). Рассмотрим подробнее сложение моментов в случае связи Рёссель–Саундерса.

Орбитальные квантовые числа $l_i$ всегда бывают целыми. Соответственно квантовое число $L$ суммарного орбитального момента также бывает целым (либо нулем).

Квантовое число $S$ результирующего спинового[10]) момента атома $M_S$ может быть целым или полуцелым в зависимости от того, является ли число электронов в атоме — четным или нечетным. При четном числе электронов $N$ квантовое число $S$ принимает все целые значения от $N \cdot 1/2$ (все $M_s$ «параллельны» друг другу) до нуля (все $M_s$ попарно компенсируют друг друга). Так, например, при $N = 4$ $S$ может иметь значения 2, 1, 0. При нечетном $N$ квантовое число $S$ принимает все полуцелые значения от $N \cdot 1/2$ (все $M_s$ «параллельны» друг другу) до 1/2 (все $M_s$, кроме одного, попарно компенсируют друг друга). Например, при $N = 5$ возможными значениями $S$ будут: 5/2, 3/2, 1/2.

---

[10]) Квантовое число $S$ не следует путать с символом терма $S$.

При данных $M_L$ и $M_S$ квантовое число $J$ результирующего момента $M_J$ может иметь одно из следующих значений:

$$J = L + S,\ L + S - 1,\ \ldots,\ |L - S|.$$

Следовательно, $J$ будет целым, если $S$ — целое (т. е. при четном числе электронов в атоме), и полуцелым, если $S$ — полуцелое (т. е. при нечетном числе электронов). Так, например,

1) в случае $L = 2$, $S = 1$ возможные значения $J$ равны 3, 2, 1;

2) в случае $L = 2$, $S = 3/2$ возможные значения $J$ равны 7/2, 5/2, 3/2, 1/2.

Энергия атома зависит от взаимной ориентации моментов $M_l$ (т. е. от квантового числа $L$), от взаимной ориентации моментов $M_s$ (от квантового числа $S$) и от взаимной ориентации $M_L$ и $M_S$ (от квантового числа $J$). Условно терм атома записывается следующим образом:

$$^{2S+1}L_J, \tag{5.39}$$

где под $L$ подразумевается одна из букв $S$, $P$, $D$, $F$ и т. д. в зависимости от значения числа $L$. Например, термы

$$^3P_0,\ ^3P_1,\ ^3P_2 \tag{5.40}$$

относятся к состояниям с одинаковыми $L = 1$, одинаковыми $S = 1$, но различными $J$, равными 0, 1, 2.

Символ (5.39) содержит в себе сведения о значениях трех квантовых чисел $L$, $S$ и $J$. В случае, когда $S < L$, стоящее слева вверху число $2S + 1$ дает мультиплетность терма, т. е. количество подуровней, различающихся значением числа $J$ (см. (5.40)). В случае, когда $S > L$, фактически мультиплетность равна $2L + 1$. Однако символ терма все равно пишут в виде (5.39), иначе он не содержал бы сведений о значении квантового числа $S$.

Обозначениями типа (5.39) мы уже пользовались в § 5.2 применительно к атомам щелочных металлов. Однако для этих элементов характерно то, что $S$ атома, совпадая с $s$ валентного электрона, равно 1/2. Теперь же мы познакомились с символическими обозначениями термов для любых случаев.

## 5.6. Магнитный момент атома

Мы уже не раз отмечали, что с механическим моментом атома $M$ связан магнитный момент $\mu$. Отношение $\mu/M$ называется гиромагнитным отношением.

Хотя представление об орбитах, как и вообще представление о траекториях микрочастиц, является неправомерным, момент, обусловленный движением электронов в атоме, называют орбитальным. Определенное экспериментально отношение магнитного $\mu_L$ и механического $M_L$ орбитальных моментов совпадает с гиромагнитным отношением, вытекающим из классических представлений (см. § 7.6 кн. 2). Это отношение равно $-e/(2m_ec)$; соответственно

$$\mu_L = -\frac{e}{2m_ec}M_L = -\frac{e\hbar}{2m_ec}\sqrt{L(L+1)} = -\mu_Б\sqrt{L(L+1)}. \tag{5.41}$$

Величина

$$\mu_Б = \frac{e\hbar}{2m_ec} = 0,927\cdot 10^{-20}\ \text{эрг/Гс} \tag{5.42}$$

называется магнетоном Бора и представляет собой естественную единицу магнитного момента. Знак минус в формуле (5.41) указывает на то, что направления магнитного и механического моментов противоположны (это обусловлено тем, что заряд электрона является отрицательным). Наличие минуса позволяет получить проекцию $\boldsymbol{\mu}_L$ на направление $z$ простой заменой в выражении (5.41) $\sqrt{L(L+1)}$ на квантовое число $m_L$:

$$\mu_{Lz} = -\mu_Б m_L. \tag{5.43}$$

При $m_L > 0$ проекция $\mathbf{M}_L$ положительна, а проекция $\boldsymbol{\mu}_L$ отрицательна; при $m_L < 0$ проекция $\mathbf{M}_L$ отрицательна, а проекция $\boldsymbol{\mu}_L$ положительна.

Ряд опытных фактов указывает на то, что гиромагнитное отношение собственных (спиновых) моментов в два раза превышает гиромагнитное отношение орбитальных моментов. Таким образом,

$$\mu_S = -\frac{e}{m_ec}M_S = -2\mu_Б\sqrt{S(S+1)}. \tag{5.44}$$

В связи с этим говорят, что спин обладает удвоенным магнетизмом.

Удвоенный магнетизм спина вытекает из опыта Эйнштейна и де Гааза и опыта Барнетта (см. §7.6 кн. 2). Кроме того, представление об удвоенном магнетизме спина позволяет дать исчерпывающее объяснение сложного эффекта Зеемана (см. следующий параграф).

Вследствие удвоенного магнетизма спина гиромагнитное отношение полных моментов $\mu_J$ и $M_J$ оказывается функцией квантовых чисел $L$, $S$ и $J$. Заметим, что числа $L$ и $S$ характеризуют отношение значений $M_L$ и $M_S$, а число $J$ определяет взаимную ориентацию орбитального и спинового моментов. Соответствующий квантово-механический расчет дает для магнитного момента атома формулу

$$\boldsymbol{\mu}_J = -\mu_{\text{Б}} g \sqrt{J(J+1)}, \tag{5.45}$$

где

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \tag{5.46}$$

Выражение (5.46) называется множителем (или фактором) Ланде[11]. В случае, когда суммарный спиновый момент атома равен нулю ($S = 0$), полный момент совпадает с орбитальным ($J = L$). Подстановка в выражение (5.46) $S = 0$ и $J = L$ дает $g = 1$, и мы приходим к значению момента, определяемому формулой (5.41). В случае, когда суммарный орбитальный момент атома равен нулю ($L = 0$), полный момент совпадает со спиновым ($J = S$). Подстановка этих значений квантовых чисел в выражение (5.46) дает $g = 2$, и мы приходим к значению момента, определяемому формулой (5.44). Отметим, что множитель Ланде может иметь значения, меньшие единицы, и даже может быть равен нулю (это получается, например, при $L = 3$, $S = 2$ и $J = 1$). В последнем случае магнитный момент атома равен нулю, хотя механический момент отличен от нуля.

Напомним, что наличие минуса в формуле (5.45) позволяет получить проекцию $\boldsymbol{\mu}_J$ на ось $z$ простой заменой $\sqrt{J(J+1)}$ на $m_J$. Следовательно,

$$\boldsymbol{\mu}_{Jz} = -\mu_{\text{Б}} g m_J \quad (m_J = -J,\ -J+1,\ \ldots,\ J-1,\ J). \tag{5.47}$$

[11]) Альфред Ланде (1888–1975) — немецкий физик.

Ряд вопросов физики атома может быть рассмотрен с помощью так называемой **векторной модели атома**. При построении такой модели механические и магнитные моменты изображаются в виде направленных отрезков. Строго говоря, вследствие неопределенности направлений векторов **M** в пространстве такой прием является неправомерным. Поэтому, работая с векторной моделью, необходимо помнить условность соответствующих построений. Векторную модель нельзя понимать буквально. Ее следует рассматривать как совокупность правил, позволяющих получить результаты, справедливость которых подтверждается строгими квантово-механическими расчетами.

Векторная модель строится по следующим правилам. Пусть $M$ и $M_z$ имеют определенные значения ($M_x$ и $M_y$ при этом не определены). Следовательно, вектор **M** может

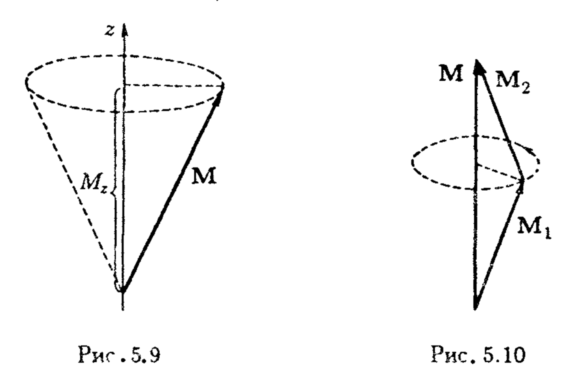



Рис. 5.9 Рис. 5.10

иметь направление одной из образующих конуса, изображенного на рис. 5.9. Можно представлять себе дело так, что вектор **M** равномерно вращается (прецессирует) вокруг направления $z$, совпадающего с осью конуса.

Допустим, что в направлении $z$ создано магнитное поле **B**. С механическим моментом **M** связан магнитный момент $\mu$. Поэтому поле воздействует на **M** (через $\mu$). Предполагается, что скорость прецессии момента **M** вокруг **B** будет тем больше, чем сильнее воздействует поле на момент, т. е. чем больше **B**.

Согласно правилам построения векторной модели складываемые моменты $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ прецессируют вокруг направления результирующего момента **M** (рис. 5.10). Моменты взаимодействуют друг с другом (через магнитные

моменты $\mu_1$ и $\mu_2$). Скорость прецессии предполагается пропорциональной интенсивности взаимодействия. В состоянии, в котором определены $M$ и $M_z$, вектор **M** прецессирует в свою очередь вокруг направления $z$. Если создать

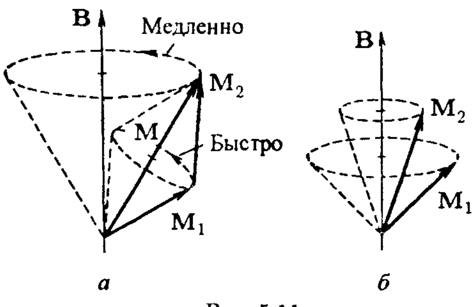



Рис. 5.11

вдоль оси $z$ магнитное поле **B**, будут наблюдаться разные явления в зависимости от соотношения между взаимодействиями моментов друг с другом и с магнитным полем. Рассмотрим два случая: 1) слабое поле — взаимодействие моментов друг с другом больше воздействия на каждый из них магнитного поля; 2) сильное поле — действие поля на каждый из моментов превосходит взаимодействие их между собой.

В первом случае (рис. 5.11 *а*) моменты складываются в результирующий момент **M**, который проецируется на направление поля. При этом происходят два вида прецессии: прецессия моментов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ вокруг направления **M** и прецессия результирующего вектора **M** вокруг направления **B**. Скорость первой прецессии будет гораздо больше, так как взаимодействие моментов между собой превосходит воздействие на каждый из них магнитного поля.

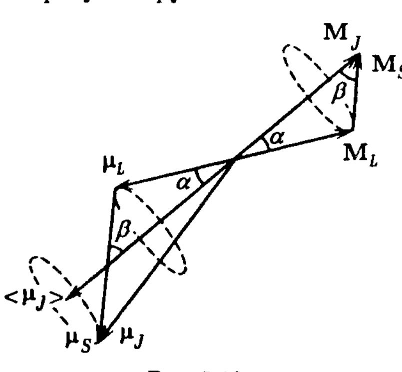



Рис. 5.12

Во втором случае (рис. 5.11 *б*) поле разрывает связь между моментами $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, и каждый из них прецессирует вокруг направления поля

независимо от другого. Проецироваться на направление поля векторы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ будут тоже каждый в отдельности.

Получим с помощью векторной модели формулу (5.45). На рис. 5.12 изображены векторы $\mathbf{M}_L$, $\mathbf{M}_S$, $\mathbf{M}_J$ и соответствующие им векторы $\boldsymbol{\mu}_L$, $\boldsymbol{\mu}_S$, $\boldsymbol{\mu}_J$. Масштабы выбраны так, что векторы $\mathbf{M}_L$ и $\boldsymbol{\mu}_L$ изображаются отрезками одинаковой длины. При этом условии вектор $\boldsymbol{\mu}_S$ изобразится отрезком в два раза большим, чем отрезок, изображающий вектор $\mathbf{M}_S$.

Из-за удвоенного магнетизма спина вектор $\boldsymbol{\mu}_J$ оказывается неколинеарным с вектором $\mathbf{M}_J$. Векторы $\mathbf{M}_L$ и $\mathbf{M}_S$ прецессируют вокруг направления $\mathbf{M}_J$, вовлекая в эту прецессию и результирующий вектор магнитного момента $\boldsymbol{\mu}_J$. За достаточно большое время наблюдения будет зарегистрировано среднее значение вектора $\boldsymbol{\mu}_J$, обозначенное на рис. 5.12 символом $\langle\boldsymbol{\mu}_J\rangle$. Найдем проекцию этого вектора на направление $\mathbf{M}_J$, которую мы обозначим просто $\mu_J$. Из рисунка видно, что

$$\mu_J = -|\boldsymbol{\mu}_L|\cos\alpha - |\boldsymbol{\mu}_S|\cos\beta, \qquad (5.48)$$

где $|\boldsymbol{\mu}_L|$ и $|\boldsymbol{\mu}_S|$ — модули соответствующих векторов. Согласно формулам (5.41) и (5.44)

$$|\boldsymbol{\mu}_L| = \mu_Б\sqrt{L(L+1)}; \qquad |\boldsymbol{\mu}_S| = 2\mu_Б\sqrt{S(S+1)}. \qquad (5.49)$$

Чтобы найти значение $\cos\alpha$, возведем в квадрат соотношение $\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_J - \mathbf{M}_L$:

$$M_S^2 = M_J^2 + M_L^2 - 2M_J M_L\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{M_J^2 + M_L^2 - M_S^2}{2M_J M_L} =$$

$$= \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{L(L+1)}}. \qquad (5.50)$$

Чтобы найти значение $\cos\beta$, возведем в квадрат соотношение $\mathbf{M}_L = \mathbf{M}_J - \mathbf{M}_S$:

$$M_L^2 = M_J^2 + M_S^2 - 2M_J M_S\cos\beta.$$

Отсюда

$$\cos\beta = \frac{M_J^2 + M_S^2 - M_L^2}{2M_J M_S} = \\ = \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{S(S+1)}}. \qquad (5.51)$$

Подстанозка выражений (5.49)-(5.51) в формулу (5.48) дает

$$\mu_J = -\mu_Б\sqrt{L(L+1)}\frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{L(L+1)}} - \\ -2\mu_Б\sqrt{S(S+1)}\frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{S(S+1)}}.$$

Произведем сокращения, объединим оба слагаемых и, кроме того, умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{J(J+1)}$. В результате получится выражение

$$\mu_J = -\mu_Б\sqrt{J(J+1)}\frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

совпадающее с (5.45).

## 5.7. Эффект Зеемана

Эффектом Зеемана называется расщепление энергетических уровней при действии на атомы магнитного поля[12]. Расщепление уровней приводит к расщеплению спектральных линий на несколько компонент. Расщепление спектральных линий при действии на излучающие атомы магнитного поля также называется эффектом Зеемана.

Расщепление линий было обнаружено Зееманом[13] в 1896 г. Расщепление весьма невелико — при $B$ порядка $10^4$ Гс оно составляет лишь несколько десятых долей ангстрема.

[12]) Расщепление энергетических уровней происходит также при действии на атомы электрического поля. Это явление называется эффектом Штарка. (Йоханнес Штарк (1874–1957) — немецкий физик.)

[13]) Питер Зе́еман (1865–1943) — нидерландский физик.

Зеемановское расщепление уровней объясняется тем, что атом, обладающий магнитным моментом $\mu_J$, приобретает в магнитном поле дополнительную энергию

$$\Delta E = -\mu_{JB} B, \qquad (5.52)$$

где $\mu_{JB}$ — проекция магнитного момента на направление поля (см. формулу (6.79) кн. 2). В соответствии с (5.47)

$$\mu_{JB} = -\mu_{\text{Б}} g m_J.$$

Подстановка этого выражения в (5.52) дает

$$\Delta E = \mu_{\text{Б}} g B m_J \quad (m_J = -J, -J+1, \ldots, J-1, J). \quad (5.53)$$

Из этой формулы следует, что энергетический уровень, отвечающий терму ${}^{2S+1}L_J$, расщепляется на $2J+1$ равноотстоящих подуровней, причем величина расщепления зависит от множителя Ланде, т. е. от квантовых чисел $L$, $S$ и $J$ данного уровня. До наложения поля состояния, различающиеся значениями квантового числа $m_J$, обладали одинаковой энергией, т. е. наблюдалось вырождение по квантовому числу $m_J$. Магнитное поле снимает вырождение по $m_J$.

Рассмотрим сначала зеемановское расщепление спектральных линий, не имеющих тонкой структуры (синглетов). Эти линии возникают при переходах между уровнями, отвечающими $S = 0$. Для таких уровней $g = 1$. Следовательно, формула (5.53) имеет вид

$$\Delta E = \mu_{\text{Б}} B m_J \quad (m_J = 0, \pm 1, \ldots, \pm L) \qquad (5.54)$$

$(J = L,\ m_J = m_L)$.

На рис. 5.13 показано расщепление уровней и спектральных линий для перехода между состояниями с $L = 1$ и $L = 0$ (для $P \to S$-перехода). В отсутствие поля наблюдается одна линия, частота которой обозначена $\omega_0$. При включении поля, кроме линии $\omega_0$, появляются две расположенные симметрично относительно нее линии с частотами $\omega_0 + \Delta\omega_0$ и $\omega_0 - \Delta\omega_0$.

На рис. 5.14 дана аналогичная схема для более сложного случая — для перехода $D \to P$. На первый взгляд может показаться, что первоначальная линия должна в этом случае расщепиться на семь компонент. Однако на самом деле получается, как и в предыдущем случае, лишь три компоненты: линия с частотой $\omega_0$ и две симметрично расположенные относительно нее линии с частотами $\omega_0 + \Delta\omega_0$

и $\omega_0 - \Delta\omega_0$. Это объясняется тем, что для магнитного квантового числа $m_J$ имеется правило отбора, согласно которому возможны только переходы, при которых $m_J$ либо остается неизменным, либо изменяется на единицу:

$$\Delta m_J = 0,\ \pm 1. \tag{5.55}$$

Вследствие этого правила возможны только переходы, указанные на рис. 5.14. В результате получаются три компо-

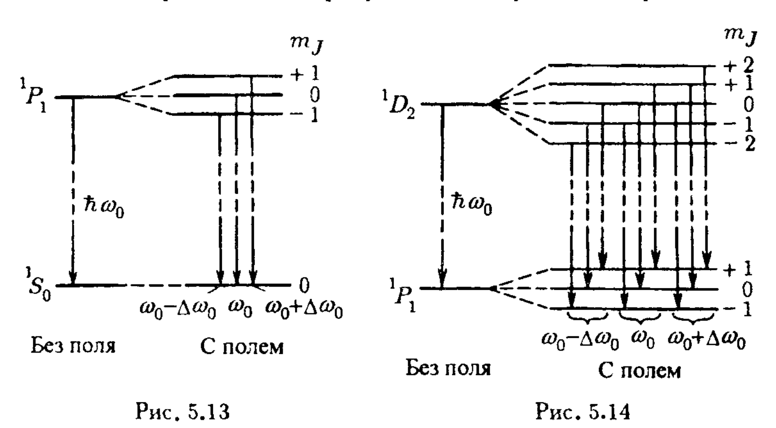



Рис. 5.13

Рис. 5.14

ненты с такими же частотами, как и в случае, изображенном на рис. 5.13.

Получающееся в рассмотренных случаях смещение компонент $\Delta\omega_0$ называется **нормальным** или **лоренцевым**[14]) **смещением**. В соответствии с формулой (5.54) это смещение равно

$$\Delta\omega_0 = \frac{\mu_Б B}{\hbar} = \frac{e\hbar}{2m_e c}\frac{B}{\hbar} = \frac{e}{2m_e c}B. \tag{5.56}$$

Рассмотренное расщепление на три линии, две из которых отстоят от несмещенной линии на величину нормального смещения $\Delta\omega_0$, носит название **простого** (или **нормального**) **эффекта Зеемана**. Оценим вели-

[14]) Лоренц дал классическое объяснение простого эффекта Зеемана и вычислил величину нормального смещения. Обратите внимание на то, что $\Delta\omega_0$ совпадает с ларморовой частотой (см. формулу (7.46) кн. 2).

чину простого зеемановского расщепления для поля порядка $10^4$ Гс. Поскольку $\lambda = 2\pi c/\omega$,

$$|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega_0 = \frac{\pi e B}{m_e \omega^2}.$$

Частота $\omega$ для видимого света равна примерно $3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Следовательно,

$$\Delta\lambda = \frac{3.14 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4}{0,91 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{30}} \text{ см} \approx 0,2 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 0,2 \text{ Å}.$$

Мы уже отмечали, что простой эффект Зеемана наблюдается в том случае, когда исходные линии не имеют тонкой структуры, т. е. являются синглетами. У линий, обладающих тонкой структурой, число компонент бывает больше трех, а величина расщепления составляет рациональную дробь от нормального смещения $\Delta\omega_0$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 \frac{r}{q}, \qquad (5.57)$$

где $r$ и $q$ — небольшие целые числа. Например, расщепление желтого дублета натрия выглядит так, как показано на рис. 5.15. Такое расщепление спектральных линий называется **сложным** (или **аномальным**) **эффектом Зеемана**.



Рис. 5.15

Сложный эффект Зеемана объясняется зависимостью величины расщепления уровней от множителя Ланде $g$, т. е. в конечном счете существованием спина электрона и удвоенным магнетизмом спина. Поясним это на следующем примере.

Рассмотрим расщепление натриевого дублета, образованного переходами $3\,^2P_{1/2} \to 3\,^2S_{1/2}$ и $3\,^2P_{3/2} \to 3\,^2S_{1/2}$ (см. рис. 5.6). Множитель Ланде имеет значения:

для терма $^2S_{1/2}$ $(L = 0,\ S = 1/2,\ J = 1/2)$

$$g = 1 + \frac{1/2 \cdot 3/2 + 1/2 \cdot 3/2 - 0 \cdot 1}{2 \cdot 1/2 \cdot 3/2} = 1 + 1 = 2;$$

для терма $^2P_{1/2}$ $(L = 1,\ S = 1/2,\ J = 1/2)$

$$g = 1 + \frac{1/2 \cdot 3/2 + 1/2 \cdot 3/2 - 1 \cdot 2}{2 \cdot 1/2 \cdot 3/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

для терма $^2P_{3/2}$ $(L = 1,\ S = 1/2,\ J = 3/2)$

$$g = 1 + \frac{3/2 \cdot 5/2 + 1/2 \cdot 3/2 - 1 \cdot 2}{2 \cdot 3/2 \cdot 5/2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

На рис. 5.16 *а* показаны расщепление уровней и разрешенные правилом (5.55) переходы для линии $^2P_{1/2} \to$

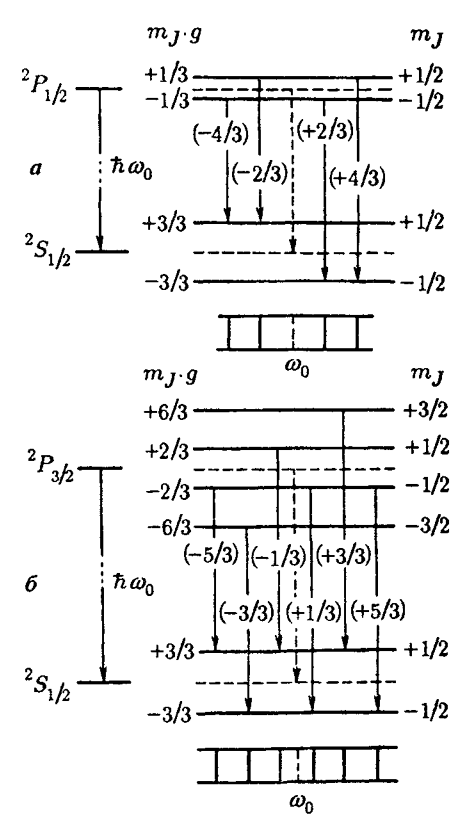



Рис. 5.16

$\to$ $^2S_{1/2}$. Для уровня $^2S_{1/2}$ приращение энергии равно

$$\Delta E' = \mu_Б B g' m'_J,$$

где $g' = 2 = 6/3$ (см. (5.53)). Для уровня $^2P_{1/2}$

$$\Delta E'' = \mu_Б B g'' m''_J,$$

где $g'' = 2/3$.

Смещение линий относительно первоначальной определяется выражением

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E'' - \Delta E'}{\hbar} = \frac{\mu_Б B}{\hbar}(g''m_J'' - g'm_J') =$$

$$= \Delta\omega_0(g''m_J'' - g'm_J').$$

В скобках у стрелок, изображающих переходы между уровнями на рис. 5.16, приведены значения $(g''m_J'' - g'm_J')$ для соответствующих спектральных линий.

Из рис. 5.16 *а* видно, что при включении поля первоначальная линия оказывается вовсе отсутствующей. Вместо нее появляются четыре линии, смещения которых, выраженные в единицах нормального смещения, составляют: $-4/3$, $-2/3$, $+2/3$ и $+4/3$, что можно записать следующим образом:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0[\pm 2/3, \pm 4/3].$$

Расщепление уровней и разрешенные переходы для линии ${}^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}$ показаны на рис. 5.16, *б*. Из схемы вытекает, что для такого перехода первоначальная линия

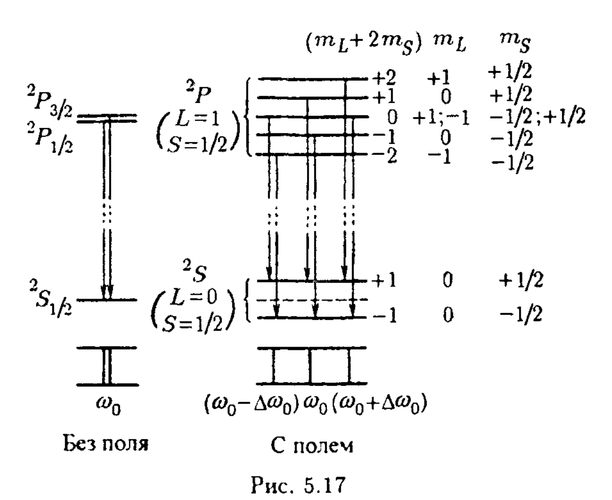



Рис. 5.17

при включении поля также отсутствует. Смещения получающихся шести линий равны:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0[\pm 1/3, \pm 3/3, \pm 5/3].$$

Все сказанное выше справедливо в случае слабого магнитного поля. Применительно к эффекту Зеемана поле считается слабым, если зеемановское расщепление уровней меньше мультиплетного расщепления.

В сильном магнитном поле связь между $\mathbf{M}_L$ и $\mathbf{M}_S$ разрывается, и они проецируются на направление поля независимо друг от друга. В этом случае

$$\Delta E = \mu_Б B m_L + 2\mu_Б B m_S = \mu_Б B(m_L + 2m_S),$$

т. е. расщепление становится целым кратным нормального расщепления. Для переходов имеют место правила отбора:

$$\Delta m_L = 0,\ \pm 1,\ \Delta m_S = 0.$$

В результате получается нормальный зеемановский триплет (рис. 5.17). Такое явление называется **эффектом Пашена—Бака**[15]). Этот эффект наблюдается, когда магнитное расщепление линий становится больше мультиплетного расщепления.

## 5.8. Электронный парамагнитный резонанс

В предыдущем параграфе мы выяснили, что в случае, когда атом с магнитным моментом, отличным от нуля, находится в магнитном поле, каждый уровень атома расщепляется на $2J + 1$ зеемановских подуровней[16]). Согласно (5.53) расстояние между подуровнями равно

$$\delta E = \mu_Б g B.$$

Предположим, что на атом, находящийся в постоянном магнитном поле $B$, падает электромагнитная волна, частота которой $\omega$ удовлетворяет условию

$$\hbar\omega = \delta E = \mu_Б g B = \hbar\Delta\omega_0 g, \qquad (5.58)$$

где $\Delta\omega_0$ — нормальное смещение (см. (5.56)). Можно ожидать, что под действием магнитного поля падающей волны будут происходить переходы атома между соседними подуровнями (правило (5.55) разрешает лишь переходы, при которых $m_J$ изменяется не больше чем на единицу). Такое явление действительно наблюдается. Оно

---

[15]) Эрнст Бак (1881–1959) — немецкий физик.

[16]) Если магнитный момент атома обусловлен внешним электроном, находящимся в $s$-состоянии, число подуровней равно двум — спин электрона «по полю» и спин «против поля».

было обнаружено Завойским[17]) в 1944 г. и получило название электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Это название объясняется следующими причинами. Явление имеет резонансный характер — переходы возникают при строго определенной частоте падающей волны. Ответственным за расщепление уровней является магнитный момент атома, обусловленный орбитальными и спиновыми моментами электронов (отметим, что, кроме электронного, наблюдается ядерный магнитный резонанс, обусловленный магнитным моментом ядра). Явление имеет место лишь для парамагнитных веществ (у диамагнетиков магнитные моменты атомов равны нулю).

Из формулы (5.58) следует, что резонансные частоты оказываются порядка нормального смещения $\Delta\omega_0$ (множитель $g$ имеет значение порядка единицы). При $B = 10^4$ Гс

$$\omega \sim \Delta\omega_0 = \frac{\mu_Б B}{\hbar} = \frac{0,927\cdot 10^{-20}\cdot 10^4}{1,05\cdot 10^{-27}} \sim 10^{11}\ \text{с}^{-1}$$

(см. (5.42)). Такой частоте отвечает длина волны порядка нескольких сантиметров. Следовательно, резонансные частоты лежат в радиодиапазоне.

Под действием электромагнитной волны атом с равной вероятностью может перейти как в более высокое, так и в более низкое энергетическое состояние (подробно об этом речь пойдет в § 5.15). В первом случае волна будет ослабляться, во втором — усиливаться. Если парамагнетик находится в тепловом равновесии, атомы распределяются по подуровням в соответствии с законом Больцмана (см. формулу (2.82) кн. 3). Следовательно, число атомов, находящихся в состоянии с меньшей энергией, превышает число атомов, находящихся в состоянии с большей энергией. Поэтому переходы, происходящие с увеличением энергии атомов, будут преобладать над переходами, происходящими с уменьшением энергии. В итоге интенсивность волны будет уменьшаться — парамагнетик поглощает электромагнитное излучение, в результате чего он нагревается.

[17]) Евгений Константинович Завойский (1907–1976) — советский физик.

Из сказанного вытекает, что электронный парамагнитный резонанс представляет собой избирательное поглощение энергии радиочастотного поля в парамагнитных веществах, находящихся в постоянном магнитном поле.

В наших рассуждениях мы неявно предполагали, что атомы парамагнетика не взаимодействуют друг с другом. Практически ЭПР наблюдается в кристаллических или жидких парамагнетиках (ЭПР наблюдался также и в некоторых газах). В конденсированных средах на отдельные атомы, кроме внешнего магнитного поля, действуют также беспорядочно ориентированные внутренние поля. Поэтому резонансные частоты для различных атомов оказываются слегка отличными, вследствие чего линии ЭПР имеют конечную ширину.

Прибор для исследования ЭПР называется радиоспектроскопом. Он состоит (рис. 5.18 *а*) из генератора электромагнитных волн *Г*, волноводов *Вв*, объемного резонатора *ОР*[18]), помещенного между полюсами электромагнита, приемника *Пр* и регистрирующего устройства *РУ*. Приемник настраивается на частоту генератора. В качестве регистрирующего устройства используется осциллограф или самописец. Парамагнитный образец помещается внутри объемного резонатора. В ходе эксперимента плавно изменяется магнитное поле, создаваемое электромагнитом. При значении $B$, отвечающем условию (5.58), наблюдается интенсивное поглощение волны образцом. Кривая поглощения показана на рис. 5.18 *б*. Она, как отмечалось выше, имеет конечную ширину.

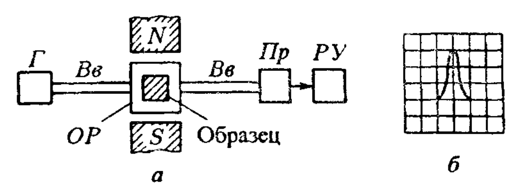



Рис. 5.18

Электронный парамагнитный резонанс используется для исследования структуры кристаллов, магнитных свойств атомных ядер и в ряде других случаев.

[18]) Волноводами называются трубы с проводящими стенками. Объемный резонатор представляет собой полость с проводящими стенками.

## 5.9. Принцип Паули. Распределение электронов по энергетическим уровням атома

В классической механике частицы одинаковой природы (например, электроны) можно различать. Пронумеровав их в некоторый момент времени $t_0$, можно следить за каждой из них при ее движении по траектории и в любой момент времени $t$ указать, какой номер был присвоен той или иной частице.

В квантовой механике положение оказывается в корне иным. В силу принципа неопределенности понятие траектории частицы утрачивает смысл. Поэтому следить за каждой из одинаковых частиц и тем самым различать их невозможно. Таким образом, в квантовой механике частицы одинаковой природы полностью теряют свою «индивидуальность» — они оказываются неразличимыми. Это утверждение носит название принципа неразличимости (или принципа тождественности) одинаковых частиц.

Принцип неразличимости одинаковых частиц приводит к глубоким физическим следствиям. Пусть имеется система из двух тождественных частиц. Обозначив совокупность координат и проекции спина частиц буквами $\xi_1$ и $\xi_2$, рассмотрим пси-функцию системы $\psi(\xi_1, \xi_2)$. Поскольку частицы неразличимы, перестановка $\xi_1$ и $\xi_2$ не должна приводить к изменению физических свойств системы, т. е. изменять квадрат модуля пси-функции. Следовательно, должно выполняться равенство

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\psi(\xi_2, \xi_1)|^2.$$

При этом возможны два случая:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1) \quad \text{и} \quad \psi(\xi_1, \xi_2) = -\psi(\xi_2, \xi_1).$$

В первом случае функция $\psi$ оказывается симметричной по отношению к переменным $\xi_1$ и $\xi_2$, во втором случае — антисимметричной.

Оказывается, что частицы с нулевым или целым спином описываются симметричными, а частицы с полуцелым спином — антисимметричными пси-функциями. Дальнейший анализ, который ввиду его сложности мы излагать в данной книге не имеем возможности, приводит к следующим результатам.

Частицы с целым или нулевым спином могут находиться в пределах данной системы в одинаковом состоянии в неограниченном количестве. Такие частицы под-

чиняются статистике, разработанной Бозе[19]) и Эйнштейном, и поэтому называются **бозонами**. Можно сказать, что бозоны являются «коллективистами», они «любят» накапливаться в одном и том же состоянии. Для бозонов характерно то, что вероятность $P$ возникновения («рождения») бозона в состоянии, в котором уже имеется $n$ частиц, пропорциональна $n$:

$$P \sim n. \tag{5.59}$$

Частицы с полуцелым спином могут находиться в квантовых состояниях только поодиночке. Такие частицы подчиняются статистике, разработанной Ферми[20]) и Дираком, и называются **фермионами**. Фермионы являются «индивидуалистами».

В 1925 г. Паули[21]) сформулировал носящий его имя принцип[22]), согласно которому *в одном и том же атоме (или в какой-либо другой квантовой системе) не может быть двух электронов (либо других частиц с полуцелым спином), обладающих одинаковой совокупностью квантовых чисел.* Иными словами, в одном и том же состоянии не могут находиться одновременно два электрона.

Каждый электрон в атоме движется в первом приближении в центрально-симметричном некулоновском поле. Состояние электрона в этом случае определяется тремя квантовыми числами $n$, $l$ и $m$, физический смысл которых был выяснен в § 5.1. В связи с существованием спина электрона к указанным квантовым числам нужно добавить квантовое число $m_s$, которое может принимать значения $\pm 1/2$ и определяет проекцию спина на заданное направление. В дальнейшем для магнитного квантового числа мы будем вместо $m$ пользоваться обозначением $m_l$, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что это число определяет проекцию орбитального момента, значение которого дается квантовым числом $l$.

Таким образом, состояние каждого электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами:

главным $n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,
азимутальным $l$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$,

---

[19]) Шатьендранат Бозе (1894–1974) — индийский физик.
[20]) Энрико Ферми (1901–1954) — итальянский физик.
[21]) Вольфганг Паули (1900–1958) — швейцарский физик.
[22]) Этот принцип называют также **принципом запрета** или **принципом исключения**.

магнитным $m_l$ $(m_l = -l, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +l)$,
спиновым $m_s$ $(m_s = +1/2, -1/2)$.

Энергия состояния зависит в основном от чисел $n$ и $l$. Кроме того, имеется слабая зависимость энергии от чисел $m_l$ и $m_s$, поскольку их значения связаны с взаимной ориентацией моментов $\mathbf{M}_l$ и $\mathbf{M}_s$, от которой зависит величина взаимодействия между орбитальным и собственным магнитными моментами электрона. Энергия состояния сильнее возрастает с увеличением числа $n$, чем с увеличением $l$. Поэтому, как правило, состояние с бо́льшим $n$ обладает, независимо от значения $l$, большей энергией.

В основном (невозбужденном) состоянии атома электроны должны располагаться на самых низких доступных для них энергетических уровнях. Поэтому, казалось бы, в любом атоме в основном состоянии все электроны должны находиться в состоянии $1s$ $(n = 1,\ l = 0)$, а основные термы всех атомов должны быть типа $S$-термов $(L = 0)$. Однако опыт показывает, что это не так.

Объяснение наблюдаемых типов термов заключается в том что согласно принципу Паули в одном и том же состоянии не может находиться одновременно более одного электрона.

В § 5.1 было показано, что данному $n$ соответствуют $n^2$ состояний, различающихся значениями $l$ и $m_l$. Квантовое число $m_s$ может принимать два значения: $\pm 1/2$. Поэтому в состояниях с данным значением $n$ могут находиться в атоме не более $2n^2$ электронов:

$n = 1$ могут иметь 2 электрона,
$n = 2$ могут иметь 8 электронов,
$n = 3$ могут иметь 18 электронов,
$n = 4$ могут иметь 32 электрона,
$n = 5$ могут иметь 50 электронов и т. д.

Совокупность электронов, имеющих одинаковые значения квантового числа $n$, образует *оболочку*[23]). Оболочки подразделяются на *подоболочки*, различающиеся значением квантового числа $l$. В соответствии с значением $n$ оболочкам дают обозначения, заимствованные из спектроскопии рентгеновских лучей:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Значение $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
| Обозначение оболочки | $K$ | $L$ | $M$ | $N$ | $O$ | $P$ | $Q$ | ... |

[23]) В некоторых книгах оболочки называются слоями, а подоболочки — оболочками.

Таблица 5.2

| Оболочка | $n$ | $l$ | $m_l$ | $m_s$ | Подоболочка |
|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 1 | 0 | 0 | ↑↓ | $K(1s)$ |
| $L$ | 2 | 0 | 0 | ↑↓ | $L_1(2s)$ |
| | | 1 | −1<br>0<br>+1 | ↑↓<br>↑↓<br>↑↓ | $L_2(2p)$ |
| $M$ | 3 | 0 | 0 | ↑↓ | $M_1(3s)$ |
| | | 1 | −1<br>0<br>+1 | ↑↓<br>↑↓<br>↑↓ | $M_2(3p)$ |
| | | 2 | −2<br>−1<br>0<br>+1<br>+2 | ↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓ | $M_3(3d)$ |
| $N$ | 4 | 0 | 0 | ↑↓ | $N_1(4s)$ |
| | | 1 | −1<br>0<br>+1 | ↑↓<br>↑↓<br>↑↓ | $N_2(4p)$ |
| | | 2 | −2<br>−1<br>0<br>+1<br>+2 | ↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓ | $N_3(4d)$ |
| | | 3 | −3<br>−2<br>−1<br>0<br>+1<br>+2<br>+3 | ↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓<br>↑↓ | $N_4(4f)$ |

Подразделение возможных состояний электрона в атоме на оболочки и подоболочки показано в табл. 5.2, в которой вместо обозначений $m_s = \pm 1/2$ применимы для наглядности символы $\uparrow\downarrow$. Подоболочки, как указано в таблице, могут обозначаться двумя способами (например, $L_1$ либо $2s$).

Для полностью заполненной подоболочки характерно равенство нулю суммарного орбитального и суммарного спинового моментов ($L = 0$, $S = 0$). Следовательно, момент импульса такой подоболочки равен нулю ($J = 0$).

Убедимся в этом на примере $3d$-подоболочки. Спины всех десяти электронов, входящих в эту подоболочку, попарно компенсируют друг друга, вследствие чего $S = 0$. Квантовое число проекции результирующего орбитального момента $M_L$ этой подоболочки на ось $z$ имеет единственное значение $m_L = \sum m_l = 0$. Следовательно, $L$ также равно нулю.

Таким образом, при определении $L$ и $S$ атома заполненные подоболочки можно не принимать во внимание.

## 5.10. Периодическая система элементов Менделеева

Принцип Паули дает объяснение периодической повторяемости свойств атомов. Проследим построение периодической системы элементов Д.И.Менделеева. Начнем с атома водорода, имеющего один электрон. Каждый последующий атом будем получать, увеличивая заряд ядра предыдущего атома на единицу и добавляя один электрон, который мы будем помещать в доступное ему согласно принципу Паули состояние с наименьшей энергией.

В атоме водорода имеется в основном состоянии один $1s$-электрон с произвольной ориентацией спина. Квантовые числа атома имеют значения: $L = 0$, $S = 1/2$, $J = 1/2$. Соответственно основной терм водородного атома имеет вид ${}^2S_{1/2}$.

Если заряд ядра атома водорода увеличить на единицу и добавить еще один электрон, получится атом гелия. Оба электрона в этом атоме могут находиться в $K$-оболочке, но с антипараллельной ориентацией спинов. Так называемая электронная конфигурация атома может быть за-

писана как $1s^2$ (два $1s$-электрона). Основным термом будет $^1S_0$ ($L = 0$, $S = 0$, $J = 0$).

На атоме гелия заканчивается заполнение $K$-оболочки. Третий электрон атома лития может занять лишь уровень $2s$ (рис. 5.19). Получается электронная конфигурация $1s^2 2s$. Основное состояние характеризуется квантовыми числами $L = 0$, $S = 1/2$, $J = 1/2$. Поэтому основным термом, как и у водорода, будет $^2S_{1/2}$. Третий электрон атома лития, занимая более высокий энергетический уровень, чем остальные два электрона, оказывается слабее, чем они, связанным с ядром атома. В результате он определяет оптические и химические свойства атома.

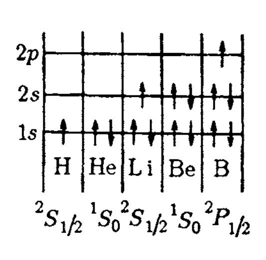



Рис. 5.19

У четвертого элемента, бериллия, полностью заполняется подоболочка $2s$. У последующих шести элементов (B, C, N, O, F и Ne) происходит заполнение электронами подоболочки $2p$, в результате чего неон имеет полностью заполненные оболочки $K$ (двумя электронами) и $L$ (восемью электронами), образующие устойчивую систему, подобную системе гелия, чем обусловливаются специфические свойства инертных газов.

Процесс застройки электронных оболочек первых 36 элементов периодической системы представлен в табл. 5.3. Одиннадцатый элемент, натрий, имеет, кроме заполненных оболочек $K$ и $L$, один электрон в подоболочке $3s$. Электронная конфигурация имеет вид $1s^2 2s^2 2p^6 3s$. Основным термом будет $^2S_{1/2}$. Электрон $3s$ связан с ядром слабее других и является валентным или оптическим электроном. В связи с этим химические и оптические свойства натрия подобны свойствам лития. Основное состояние оптического электрона в атоме натрия характеризуется значением $n = 3$. Этим и объясняется то обстоятельство, что на схеме уровней атома натрия (см. рис. 5.6) основной уровень помечен цифрой 3. Попутно отметим, что атом цезия имеет в основном состоянии электронную конфигурацию

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s.$$

Таблица 5.3

| Элемент | $K$ | $L$ | | $M$ | | | $N$ | | Основной терм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1$s$ | 2$s$ | 2$p$ | 3$s$ | 3$p$ | 3$d$ | 4$s$ | 4$p$ | |
| 1 H | 1 | — | — | — | — | — | — | — | $^2S_{1/2}$ |
| 1 He | 2 | — | — | — | — | — | — | — | $^1S_0$ |
| 3 Li | 2 | 1 | — | — | — | — | — | — | $^2S_{1/2}$ |
| 4 Be | 2 | 2 | — | — | — | — | — | — | $^1S_0$ |
| 5 B | 2 | 2 | 1 | — | — | — | — | — | $^2P_{1/2}$ |
| 6 C | 2 | 2 | 2 | — | — | — | — | — | $^3P_0$ |
| 7 N | 2 | 2 | 3 | — | — | — | — | — | $^4S_{3/2}$ |
| 8 O | 2 | 2 | 4 | — | — | — | — | — | $^3P_2$ |
| 9 F | 2 | 2 | 5 | — | — | — | — | — | $^2P_{3/2}$ |
| 10 Ne | 2 | 2 | 6 | — | — | — | — | — | $^1S_0$ |
| 11 Na | 2 | 8 | | 1 | — | — | — | — | $^2S_{1/2}$ |
| 12 Mg | 2 | 8 | | 2 | — | — | — | — | $^1S_0$ |
| 13 Al | 2 | 8 | | 2 | 1 | — | — | — | $^2P_{1/2}$ |
| 14 Si | 2 | 8 | | 2 | 2 | — | — | — | $^3P_0$ |
| 15 P | 2 | 8 | | 2 | 3 | — | — | — | $^4S_{3/2}$ |
| 16 S | 2 | 8 | | 2 | 4 | — | — | — | $^3P_2$ |
| 17 Cl | 2 | 8 | | 2 | 5 | — | — | — | $^2P_{3/2}$ |
| 18 Ar | 2 | 8 | | 2 | 6 | — | — | — | $^1S_0$ |
| 19 K | 2 | 8 | | 8 | | — | 1 | — | $^2S_{1/2}$ |
| 20 Ca | 2 | 8 | | 8 | | — | 2 | — | $^1S_0$ |
| 21 Sc | 2 | 8 | | 8 | | 1 | 2 | — | $^2D_{3/2}$ |
| 22 Ti | 2 | 8 | | 8 | | 2 | 2 | — | $^3F_2$ |
| 23 V | 2 | 8 | | 8 | | 3 | 2 | — | $^4F_{3/2}$ |
| 24 Cr | 2 | 8 | | 8 | | 5 | 1 | — | $^7S_3$ |
| 25 Mn | 2 | 8 | | 8 | | 5 | 2 | — | $^6S_{5/2}$ |
| 26 Fe | 2 | 8 | | 8 | | 6 | 2 | — | $^5D_4$ |
| 27 Co | 2 | 8 | | 8 | | 7 | 2 | — | $^4F_{9/2}$ |
| 28 Ni | 2 | 8 | | 8 | | 8 | 2 | — | $^3F_4$ |
| 29 Cu | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 1 | — | $^2S_{1/2}$ |
| 30 Zn | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | — | $^1S_0$ |
| 31 Ga | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 1 | $^2P_{1/2}$ |
| 32 Ge | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 2 | $^3P_0$ |
| 33 As | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 3 | $^4S_{3/2}$ |
| 34 Se | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 4 | $^3P_2$ |
| 35 Br | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 5 | $^2P_{3/2}$ |
| 36 Kr | 2 | 8 | | 8 | | 10 | 2 | 6 | $^1S_0$ |

Следовательно, его оптический электрон имеет в основном состоянии $n = 6$. В соответствии с этим помечены уровни на рис. 5.7.

У следующих за натрием элементов нормально заполняются подоболочки $3s$ и $3p$. Подоболочка $3d$ при данной общей конфигурации оказывается энергетически выше подоболочки $4s$, в связи с чем при незавершенном в целом заполнении оболочки $M$ начинается заполнение оболочки $N$. Подоболочка $4p$ лежит уже выше, чем $3d$, так что после $4s$ заполняется подоболочка $3d$.

С аналогичными отступлениями от обычной последовательности, повторяющимися время от времени, осуществляется застройка электронных уровней всех атомов. При этом периодически повторяются сходные электронные конфигурации (например, $1s$, $2s$, $3s$ и т. д.) сверх полностью заполненных подоболочек, чем обусловливается периодическая повторяемость химических и оптических свойств атомов.

При установлении вида термов, возможных при заданной электронной конфигурации, нужно иметь в виду, что принцип Паули разрешает не все сочетания значений $L$ и $S$, которые вытекают из конфигурации. Так, например, при конфигурации $np^2$ (два электрона с главным квантовым числом $n$ и $l = 1$) возможными значениями $L$ будут 0, 1, 2, а $S$ может иметь значения 0 и 1. В соответствии с этим, казалось бы, возможны термы

$$^1S,\ ^1P,\ ^1D,\ ^3S,\ ^3P,\ ^3D. \tag{5.60}$$

Однако согласно принципу Паули разрешены лишь такие термы, для которых значения хотя бы одного из квантовых чисел $m_l$ и $m_s$ эквивалентных электронов (т. е. электронов с одинаковыми $n$ и $l$) не совпадают[24]. Этому требованию не удовлетворяет, например, терм $^3D$. Действительно, $L = 2$ означает, что орбитальные моменты электронов «параллельны», следовательно, значения $m_l$ у этих электронов будут совпадать. Аналогично $S = 1$ означает, что спины электронов также «параллельны», вследствие чего совпадают и значения $m_s$. В итоге все четыре квантовых числа ($n$, $l$, $m_l$ и $m_s$) у обоих электронов оказываются одинаковыми, что противоречит принципу Паули.

[24]) Для неэквивалентных электронов, т. е. электронов, отличающихся либо $n$, либо $l$, либо и тем и другим, это требование отпадает.

Таким образом, терм ${}^3D$ в системе из двух эквивалентных электронов реализоваться не может.

Чтобы установить разрешенные принципом Паули термы эквивалентных электронов, используют следующий прием: в столбцах таблицы, помеченных значениями $m_l$ отдельно взятого электрона, проставляют в виде стрелок значения $m_s$ (стрелка вверх означает $m_s = +1/2$, стрелка вниз — $m_s = -1/2$) (табл. 37.2 составлена для двух эквивалентных $p$-электронов). В таблице содержатся все допустимые принципом Паули сочетания значений $m_l$ и $m_s$

Таблица 5.4

| $m_l$ | | | $m_L = \sum m_l$ | $m_S = \sum m_s$ | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | 0 | −1 | | | | | |
| ↑↓ | | | +2 | 0 | A | | |
| ↑ | ↑ | | +1 | +1 | | B | |
| ↑ | ↓ | | +1 | 0 | A | | |
| ↓ | ↑ | | +1 | 0 | | B | |
| ↓ | ↓ | | +1 | −1 | | B | |
| ↑ | | ↑ | 0 | +1 | | B | |
| ↑ | | ↓ | 0 | 0 | A | | |
| ↓ | | ↑ | 0 | 0 | | B | |
| ↓ | | ↓ | 0 | −1 | | B | |
| | ↑↓ | | 0 | 0 | | | C |
| | ↑ | ↑ | −1 | +1 | | B | |
| | ↑ | ↓ | −1 | 0 | A | | |
| | ↓ | ↑ | −1 | 0 | | B | |
| | ↓ | ↓ | −1 | −1 | | B | |
| | | ↑↓ | −2 | 0 | A | | |

обоих электронов. В тех случаях, когда обе стрелки попадают в один столбец (это означает, что $m_l$ обоих электронов одинаково), они направлены в противоположные стороны ($m_s$ должны быть разными). В следующих столбцах таблицы проставлены соответствующие данному сочетанию значения квантовых чисел $m_L$ и $m_S$, равные алгебраической сумме чисел $m_l$ и $m_s$. Совокупность допустимых значений $m_L$ и $m_S$ позволяет установить допустимые сочетания значений $L$ и $S$. Одна из таких совокупностей, помеченная буквой A в последнем столбце таблицы, соответствует сочетанию $L = 2$, $S = 0$, т. е. терму ${}^1D$; вторая совокупность, помеченная буквой B, соответствует $L = 1$, $S = 1$, т. е. терму ${}^3P$; наконец, совокупность, помеченная

буквой C, соответствует $L = 0$, $S = 0$, т. е. терму $^1S$. Таким образом, из указанных в (5.60) шести формально возможных термов не противоречат принципу Паули только три: $^1S$, $^3P$, $^1D$, причем терм $^3P$ является триплетом — он подразделяется на компоненты $^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$.

Теперь возникает вопрос, какой из термов

$$^1S_0,\ ^3P_2,\ ^3P_1,\ ^3P_0,\ ^1D_2 \qquad (5.61)$$

соответствует основному состоянию, т. е. состоянию с наименьшей энергией. Ответ на этот вопрос дают два эмпирических правила Хунда [25]:

1. Из термов, принадлежащих данной электронной конфигурации, наименьшей энергией обладает терм с наибольшим возможным значением $S$ и с наибольшим возможным при таком $S$ значением $L$.

2. Мультиплеты, образованные эквивалентными электронами, являются правильными (это значит, что с увеличением $J$ возрастает энергия состояния), если заполнено не более половины подоболочки, и обращенными (с увеличением $J$ энергия убывает), если заполнено больше половины подоболочки.

Из второго правила Хунда следует, что в случае, когда заполнено не более половины подоболочки, наименьшей энергией обладает компонента мультиплета с $J = |L - S|$, в противном случае — компонента с $J = L + S$.

Согласно первому правилу Хунда из числа термов (5.61) наименьшей энергией должен обладать один из $P$-термов (у этих термов наибольшее $S$). При конфигурации $np^2$ подоболочка $p$ заполнена только на 1/3, т. е. меньше чем наполовину. Следовательно, согласно второму правилу Хунда наименьшей энергией обладает терм с наименьшим значением $J$, т. е. терм $^3P_0$. Этот терм и является основным для конфигурации $np^2$ (см. 6 C, 14 Si и 32 Ge в табл. 5.3).

## 5.11. Рентгеновские спектры

В § 2.1 мы уже отмечали, что имеется два вида рентгеновского излучения — тормозное и характеристическое. При не слишком больших энергиях бомбардирующих антикатод электронов наблюдается лишь тормозное

[25]) Фридрих Хунд (р. в 1896 г.) — немецкий физик.

излучение, обладающее сплошным спектром и не зависящее от материала антикатода. Когда энергия бомбардирующих электронов становится достаточной для вырывания электронов из внутренних оболочек атома, на фоне тормозного излучения появляются резкие линии характеристического излучения. Частоты этих линий зависят от природы вещества, из которого изготовлен антикатод (по этой причине излучение и называется характеристическим).

Рентгеновские спектры отличаются заметной простотой. Они состоят из нескольких серий, обозначаемых буквами $K$, $L$, $M$, $N$ и $O$. Каждая серия насчитывает небольшое число линий, обозначаемых в порядке возрастания частоты индексами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... ($K_\alpha$, $K_\beta$, $K_\gamma$, ... ; $L_\alpha$, $L_\beta$, $L_\gamma$, ... и т. д.). Спектры разных элементов имеют сходный характер. При увеличении атомного номера $Z$ весь рентгеновский спектр лишь смещается в коротковолновую часть, не меняя своей структуры (рис. 5.20). Это объясняется тем, что рентгеновские спектры возникают при

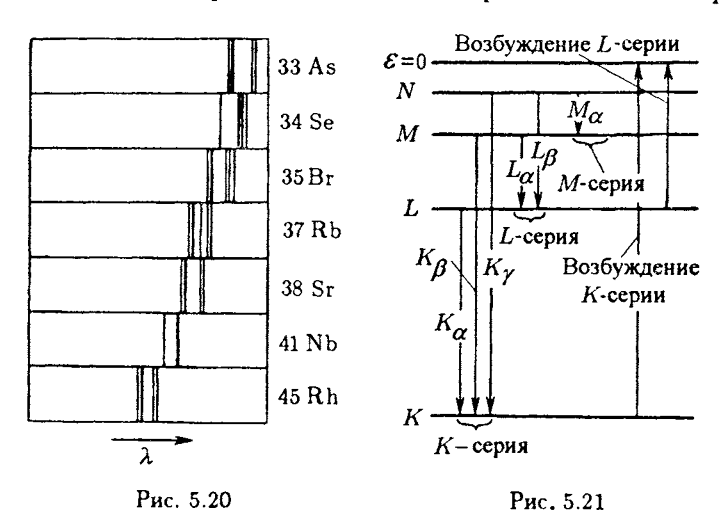



Рис. 5.20 Рис. 5.21

переходах электронов во внутренних частях атомов, которые (части) имеют сходное строение.

Схема возникновения рентгеновских спектров дана на рис. 5.21. Возбуждение атома состоит в удалении одного из внутренних электронов. Если вырывается один из двух электронов $K$-слоя, то освободившееся место может быть

занято электроном из какого-либо внешнего слоя ($L$, $M$, $N$ и т. д.). При этом возникает $K$-серия. Аналогично возникают и другие серии. Серия $K$ обязательно сопровождается остальными сериями, так как при испускании ее линий освобождаются уровни в слоях $L$, $M$ и т. д., которые будут в свою очередь заполняться электронами из более высоких слоев.

Мозли[26]) установил в 1913 г. закон, связывающий частоты линий рентгеновского спектра с атомным номером $Z$ испускающего их элемента. Согласно этому закону частоты линии $K_\alpha$ можно представить формулой

$$\omega_{K_\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)$$

($R$ — постоянная Ридберга), линии $K_\beta$ — формулой

$$\omega_{K_\beta} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right),$$

линии $L_\alpha$ — формулой

$$\omega_{L_\alpha} = R(Z-7,5)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

и т. д. Все эти формулы имеют вид

$$\omega = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right). \qquad (5.62)$$

Закон Мозли обычно выражают формулой

$$\sqrt{\omega} = C(Z-\sigma). \qquad (5.63)$$

($C$ и $\sigma$ — константы) и формулируют следующим образом: *корень квадратный из частоты является линейной функцией атомного номера $Z$.*

На рис. 5.22 изображены построенные по экспериментальным точкам графики зависимости $\sqrt{\omega}$ от $Z$ для линий $K_\alpha$ и $L_\alpha$. По этим графикам можно судить, насколько точно выполняется закон Мозли. При внимательном рассмотрении можно заметить, что график для линии $K_\alpha$ имеет не вполне прямолинейный характер.

Закон Мозли позволяет по измеренной длине волны рентгеновских линий точно установить атомный номер

---

[26]) Генри Гвин Джефрис Мозли (1887–1915) — английский физик.

данного элемента; он сыграл большую роль при размещении элементов в периодической системе.

Мозли дал простое теоретическое объяснение найденного им закона. Он отметил, что линии с частотами, определяемыми формулой (5.62), совпадают с линиями, испускаемыми при переходе электрона, находящегося в поле заряда $(Z - \sigma)e$, с уровня с номером $n_2$ на уровень с номером $n_1$. Смысл константы $\sigma$ легко понять: электроны, совершающие переходы при испускании рентгеновских лучей, находятся под воздействием ядра, притяжение которого несколько ослаблено действием остальных окружающих его электронов. Это так называемое экранирующее действие и находит свое выражение в необходимости вычесть из $Z$ некоторую величину $\sigma$.

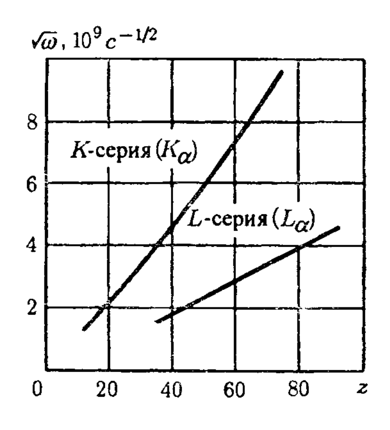


Рис. 5.22

Заметим, что формула (5.62) основана на допущении, что постоянная экранирования $\sigma$ для обоих термов имеет одинаковое значение. На самом же деле экранирование, например, для $K$-терма будет слабее, чем для $L$-терма, потому что электрон, находящийся в $L$-оболочке, экранируют оба электрона $K$-оболочки и, кроме того, частичное участие в экранировании принимают остальные электроны $L$-оболочки, в то время как для электрона $K$-оболочки экранирование осуществляется только одним вторым $K$-электроном. Более строго формулу (5.62) следовало бы писать в виде

$$\omega = R\left[\frac{(Z-\sigma_1)^2}{n_1^2} - \frac{(Z-\sigma_2)^2}{n_2^2}\right].$$

## 5.12. Энергия молекулы

Опыт дает, что рентгеновские спектры тяжелых элементов не зависят от того, в состав какого химического соединения входит данный элемент. Отсюда следует, что силы, удерживающие атомы в молекуле, вызваны взаимо-

действием внешних электронов. Электроны внутренних оболочек при объединении атомов в молекулу остаются в прежних состояниях.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только двухатомных молекул. Различают два вида связи между атомами в молекуле. Один из них осуществляется в том случае, когда электроны в молекуле можно разделить на две группы, каждая из которых все время находится около одного из ядер. Электроны распределяются так, что около одного из ядер образуется избыток электронов, а около другого — их недостаток. Таким образом, молекула как бы состоит из двух ионов противоположных знаков, притягивающихся друг к другу. Связь этого типа называется **гетерополярной** (или **ионной**). Примером молекул с гетерополярной связью могут служить NaCl, KBr, HCl и т. д.

Второй вид связи наблюдается в тех молекулах, в которых часть электронов движется около обоих ядер. Такая связь называется **гомеополярной** (или **ковалентной**, или **атомной**). Она образуется парами электронов с противоположно направленными спинами. Среди молекул этого типа следует различать молекулы с одинаковыми ядрами ($H_2$, $N_2$, $O_2$) и молекулы с разными ядрами (например, CN). В молекулах первого рода электроны распределены симметрично. В молекулах второго рода имеется некоторая асимметрия в распределении электронов, благодаря чему молекулы приобретают электрический дипольный момент.

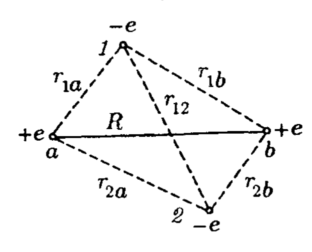



Рис. 5.23

Простейшей молекулой с гомеополярной связью является молекула водорода. Вскоре после создания квантовой механики Гайтлер[27]) и Лондон[28]) (1927 г.) предприняли успешную попытку квантово-механического расчета основного состояния молекулы $H_2$. Им удалось решить уравнение Шрёдингера для системы, состоящей из двух протонов (ядер атома водорода) и двух электронов (рис. 5.23). Потенциальная энергия такой си-

[27]) Вальтер Генрих Гайтлер (1904–1981) — немецкий физик.

[28]) Фриц Лондон (1900–1954) — немецкий физик.

стемы равна

$$U = -\frac{e^2}{r_{1a}} - \frac{e^2}{r_{2a}} - \frac{e^2}{r_{1b}} - \frac{e^2}{r_{2b}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R}.$$

Ядра имеют массу, примерно в 2000 раз превышающую массу электрона. Поэтому они движутся гораздо медленнее электронов, и в первом приближении их можно считать неподвижными. В этом приближении уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\nabla_1^2\psi + \nabla_2^2\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left[E - e^2\left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r_{1a}} - \frac{1}{r_{2a}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2b}}\right)\right]\psi = 0. \tag{5.64}$$

Здесь $\nabla_1^2$ — оператор Лапласа, содержащий координаты одного электрона, а $\nabla_2^2$ — оператор Лапласа, содержащий координаты другого электрона.

Получающиеся из уравнения (5.64) собственные значения энергии оказываются зависящими от расстояния между ядрами $R$, т. е. $E = E(R)$, причем в случаях параллельной и антипараллельной ориентации спинов электронов характер этой зависимости существенно различен (рис. 5.24). Образование молекулы возможно лишь при сближении атомов с антипараллельными спинами. Асимп-

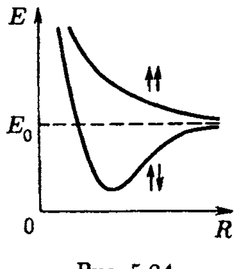



Рис. 5.24

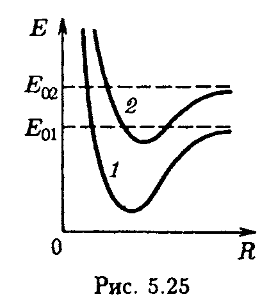



Рис. 5.25

тотическое значение $E_0$, к которому стремится энергия молекулы при $R \to \infty$ для обеих изображенных на рисунке кривых, одинаково и равно сумме энергий изолированных атомов.

Аналогично обстоит дело и в случае других двухатомных молекул. Энергия, обусловленная электронной конфигурацией (электронная энергия), имеет минимум при

некотором значении $R$ и изображается кривой такого же вида, как для водородной молекулы (см. кривую *1* на рис. 5.25).

Изменение электронной конфигурации молекулы приводит к изменению кривой зависимости электронной энергии от расстояния между ядрами $R$. Асимптотическое значение энергии также становится иным — равным суммарной энергии изолированных атомов в новом квантовом состоянии (см. кривую *2* на рис. 5.25).

В основном изменение энергетического запаса молекулы происходит, как и в атоме, в результате изменений в электронной конфигурации, образующей периферическую часть молекулы. Однако при заданной электронной конфигурации ядра молекулы могут различным образом колебаться и вращаться относительно общего центра масс. С этими видами движения связаны запасы колебательной и вращательной энергии, которые должны быть учтены в общем балансе. Введем обозначения:

$E_e$ — энергия, обусловленная электронной конфигурацией (электронная энергия);

$E_v$ — энергия, соответствующая колебаниям молекулы (колебательная, или вибрационная, энергия);

$E_r$ — энергия, связанная с вращением молекулы (вращательная, или ротационная, энергия).

В первом приближении отдельные виды молекулярных движений — движение электронов, колебание и вращение молекулы — можно считать независимыми друг от друга. Поэтому полную энергию молекулы можно представить в виде

$$E = E_e + E_v + E_r.$$

Согласно (4.60) энергия гармонического осциллятора определяется выражением

$$E_v = (v + 1/2)\hbar\omega_v \quad (v = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.65}$$

где $v$ — колебательное квантовое число, $\omega_v$ — классическая частота осциллятора (в формуле (4.60) эти величины обозначены буквами $n$ и $\omega$). Напомним, что для колебательного квантового числа имеется правило отбора (см. (4.61)).

$$\Delta v = \pm 1. \tag{5.66}$$

Кривая потенциальной энергии молекулы (см. рис. 5.25) совпадает с параболой только при малых колебаниях. Ангармоничность (отклонения от гармоничности), наступающая при увеличении интенсивности колебаний, приводит к тому, что с увеличением квантового числа $v$ уровни сгущаются, имея своим пределом энергию $E_0$ диссоциированной молекулы (рис. 5.26). Однако при небольших значениях $v$ можно с достаточной степенью точности считать, что колебательная энергия молекулы определяется формулой (5.65).

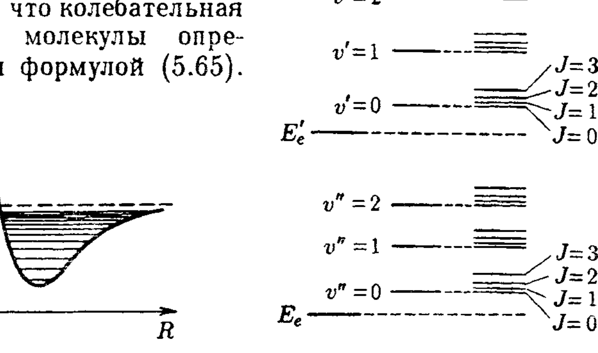



Рис. 5.26 Рис. 5.27

Теперь обратимся к вопросу о вращательной энергии молекулы. Энергия системы, имеющей момент инерции $I$ и вращающейся с угловой скоростью $\omega_r$, равна

$$E_r = \frac{I\omega_r^2}{2} = \frac{(I\omega_r)^2}{2I} = \frac{M^2}{2I},$$

где $M = I\omega_r$ — момент импульса системы. Согласно (4.34) момент импульса может принимать лишь дискретные значения:

$$M = \hbar\sqrt{J(J+1)} \quad (J = 0, 1, 2, \ldots)$$

($J$ — квантовое число момента импульса). Следовательно, вращательная энергия молекулы может иметь только квантованные значения:

$$E_r = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}, \tag{5.67}$$

где $I$ — момент инерции молекулы относительно оси, проходящей через ее центр масс, $J$ — вращательное

квантовое число, принимающее значения 0, 1, 2 и т. д.

Для вращательного квантового числа имеется правило отбора

$$\Delta J = \pm 1. \tag{5.68}$$

Итак, в соответствии с (5.65) и (5.67) полная энергия молекулы равна

$$E = E_e + (v + 1/2)\hbar\omega_v + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}. \tag{5.69}$$

Опыт и теория показывают, что расстояние между вращательными уровнями $\Delta E_r$ значительно меньше расстояния между колебательными уровнями $\Delta E_v$, которое в свою очередь значительно меньше, чем расстояние между электронными уровнями $\Delta E_e$. Следовательно, схема энергетических уровней двухатомной молекулы выглядит так, как показано на рис. 5.27 (приведены только два электронных уровня). Совокупность уровней содержится в правом столбце. Первые два столбца лишь поясняют возникновение уровней.

## 5.13. Молекулярные спектры

В то время как атомные спектры состоят из отдельных линий, молекулярные спектры при наблюдении в прибор средней разрешающей силы представляются состоящими




Рис. 5.28

из полос (см. рис. 5.28, на котором дан участок спектра, получающегося при тлеющем разряде в воздухе). При применении приборов высокой разрешающей силы обнаруживается, что полосы состоят из большого числа тесно расположенных линий (см. рис. 5.29, на котором видна тонкая структура одной из полос спектра молекул азота).

В соответствии с их характером спектры молекул носят название **полосатых спектров**. В зависимости от того, изменение каких видов энергии (электронной, колебательной или вращательной) обусловливает испускание

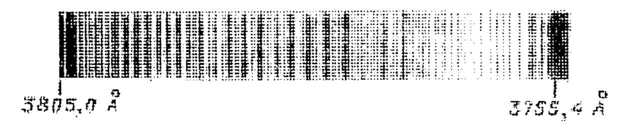



Рис. 5.29

молекулой фотона, различают три вида полос: 1) вращательные, 2) колебательно-вращательные и 3) электронно-колебательные. Полосы на рис. 5.28 принадлежат к электронно-колебательному типу. Для полос этого типа характерно наличие резкого края, называемого **кантом** полосы. Другой край такой полосы оказывается размытым. Кант бывает обусловлен сгущением линий, образующих полосу. У вращательных и колебательно-вращательных полос канта нет.

Мы ограничимся рассмотрением вращательных и колебательно-вращательных спектров двухатомных молекул. Энергия таких молекул слагается из электронной, колебательной и вращательной энергий (см. формулу (5.69)). В основном состоянии молекулы все три вида энергии имеют минимальное значение. При сообщении молекуле достаточного количества энергии она переходит в возбужденное состояние и затем, совершая разрешенный правилами отбора переход в одно из более низких энергетических состояний, излучает фотон:

$$\hbar\omega = \Delta E_e + \Delta E_v + \Delta E_r = E'_e - E''_e + (v' + 1/2)\hbar\omega'_v - (v'' + 1/2)\hbar\omega''_v + \frac{\hbar^2 J'(J'+1)}{2I'} - \frac{\hbar^2 J''(J''+1)}{2I''}$$

(необходимо иметь в виду, что как $\omega_v$, так и $I$ отличаются для различных электронных конфигураций молекулы).

В предыдущем параграфе было указано, что

$$\Delta E_e \gg \Delta E_v \gg \Delta E_r.$$

Поэтому при слабых возбуждениях изменяется только $E_r$, при более сильных — только $E_v$ и лишь при еще более сильных возбуждениях изменяется электронная конфигурация молекулы, т. е. $E_e$.

**Вращательные полосы.** Наименьшей энергией обладают фотоны, соответствующие переходам молекулы из одного вращательного состояния в другое (электронная конфигурация и энергия колебания при этом не изменяются):

$$\hbar\omega = \Delta E_r = \frac{\hbar^2 J'(J'+1)}{2I} - \frac{\hbar^2 J''(J''+1)}{2I}.$$

Возможные изменения квантового числа $J$ ограничены правилом отбора (5.68). Поэтому частоты линий, испускаемых при переходах между вращательными уровнями, могут иметь значения

$$\omega = \frac{\Delta E_r}{\hbar} = B[(J+1)(J+2) - J(J+1)] =$$
$$= 2B(J+1) = \omega_1(J+1),$$

где $J$ — квантовое число уровня, на который совершается переход (оно может иметь значения 0, 1, 2, ...), а

$$B = \hbar/2I. \tag{5.70}$$

На рис. 5.30 показана схема возникновения вращательной полосы. Вращательный спектр состоит из ряда

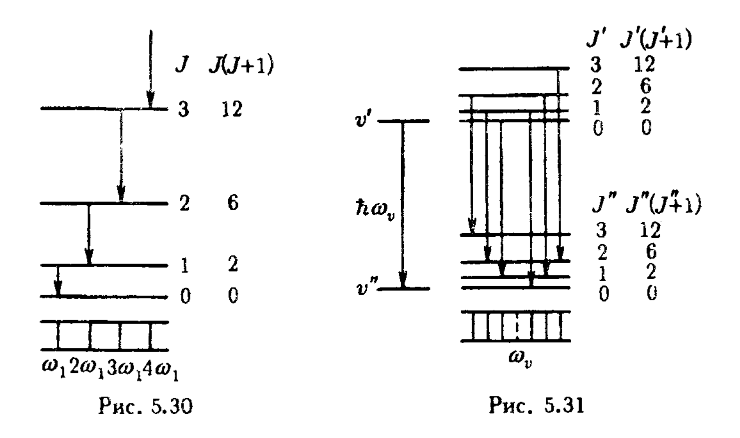



Рис. 5.30　　　Рис. 5.31

равноотстоящих линий, расположенных в очень далекой инфракрасной области. Измерив расстояние между линиями $\Delta\omega = \omega_1$, можно определить константу (5.70) и найти момент инерции молекулы. Затем, зная массы ядер, можно вычислить равновесное расстояние $R_0$ между ними в двухатомной молекуле.

Расстояние между линиями $\Delta\omega$ бывает порядка $10^{13}$ $с^{-1}$, так что для моментов инерции молекул получаются значения порядка $10^{-40}$ г·см$^2$. Например, для молекулы HCl $I = 2,71 \cdot 10^{-40}$ г·см$^2$, что соответствует $R_0 = 1,29$ Å.

**Колебательно-вращательные полосы.** В случае, когда при переходе изменяется и колебательное, и вращательное состояние молекулы (рис. 5.31), энергия излучаемого фотона будет равна

$$\hbar\omega = \Delta E_v + \Delta E_r = \hbar\omega_v(v' + 1/2) - \hbar\omega_v(v'' + 1/2) + \\ + \frac{\hbar^2 J'(J'+1)}{2I} - \frac{\hbar^2 J''(J''+1)}{2I}.$$

Для квантового числа $v$ действует правило отбора (5.66), для $J$ — правило (5.68).

Поскольку $\Delta E_v \gg \Delta E_r$, испускание фотона может наблюдаться не только при $J' > J''$, но и при $J' < J''$. В случае, если $J' > J''$, частоты фотонов определяются формулой

$$\omega = \omega_v + B[(J+1)(J+2) - J(J+1)] = \\ = \omega_v + 2B(J+1) = \omega_v + 2Bk \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $J$ — вращательное квантовое число нижнего уровня, которое может принимать значения 0, 1, 2, ... ; $B$ — величина (5.70). Если $J' < J''$, формула для частоты фотонов имеет вид

$$\omega = \omega_v + B[(J-1)J - J(J+1)] = \\ = \omega_v - 2BJ = \omega_v - 2Bk \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $J$ — вращательное квантовое число нижнего уровня, которое может принимать значения 1, 2, ... (в этом случае $J'' = J$ не может иметь значения 0, так как тогда $J'$ равнялось бы $-1$).

Оба случая можно охватить одной формулой:

$$\omega = \omega_0 \pm 2Bk = \omega_v \pm \omega_1 k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Совокупность линий с частотами, определяемыми этой формулой, называется колебательно-вращательной полосой. Колебательная часть частоты $\omega_v$ определяет спектральную область, в которой располагается полоса; вращательная часть $\pm\omega_1 k$ определяет тонкую структуру полосы, т. е. расщепление отдельных линий. Область, в которой располагаются колебательно-вращательные полосы, простирается примерно от 8000 до 50 000 Å.

Из рис. 5.31 видно, что колебательно-вращательная полоса состоит из совокупности симметричных относительно $\omega_v$ линий, отстоящих друг от друга на $\Delta\omega = \omega_1$. Только в середине полосы расстояние в два раза больше, так как линия с частотой $\omega_v$ не возникает.

Расстояние между компонентами колебательно-вращательной полосы связано с моментом инерции молекулы таким же соотношением, как и в случае вращательной полосы, так что, измерив это расстояние, можно найти момент инерции молекулы.

Заметим, что в полном соответствии с выводами теории вращательные и колебательно-вращательные спектры наблюдаются на опыте только для несимметричных двухатомных молекул (т. е. молекул, образованных двумя различными атомами). У симметричных молекул дипольный момент равен нулю, что приводит к запрету вращательных и колебательно-вращательных переходов. Электронно-колебательные спектры наблюдаются как для несимметричных, так и для симметричных молекул.

## 5.14. Комбинационное рассеяние света

В 1928 г. Ландсберг[29]) и Мандельштам[30]) и одновременно Раман[31]) и Кришнан[32]) открыли явление, заключающееся в том, что в спектре рассеяния, возникающем при

---

[29]) Григорий Самуилович Ландсберг (1890–1957) — советский физик.

[30]) Леонид Исаакович Мандельштам (1879–1944) — советский физик.

[31]) Чандрасекхара Венката Раман (1888–1970) — индийский физик.

[32]) Рашал Сапгамесмарп Кришнан (род. в 1911 г.) — индийский физик.

прохождении света через газы, жидкости или прозрачные кристаллические тела, помимо несмещенной линии содержатся новые линии, частоты которых $\omega$ представляют собой комбинацию частоты падающего света $\omega_0$ и частот $\omega_i$ колебательных или вращательных переходов рассеивающих молекул:

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_i. \tag{5.71}$$

Это явление получило название **комбинационного рассеяния света.** [33])

На рис. 5.32 приведен спектр комбинационного рассеяния кислорода, возбуждаемый линией Hg 2536,5 Å. На

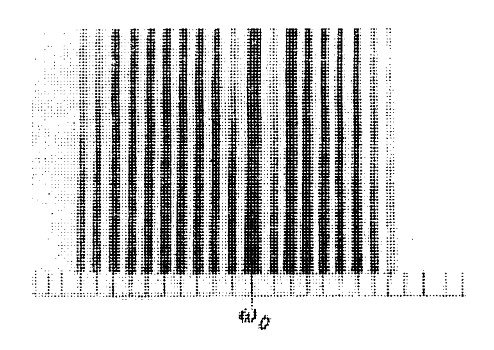



Рис. 5.32

линию комбинационного рассеяния, расположенную справа от линии источника, наложилась линия Hg 2534,8 Å (менее интенсивная, чем Hg 2536,5 Å), вследствие чего интенсивность этой линии получилась больше, чем других. Из рисунка видно, что спектр комбинационного рассеяния состоит из несмещенной линии $\omega_0$, относительно которой симметрично располагается ряд спутников. Каждому «красному» спутнику (т. е. спутнику, смещенному в сторону бо́льших длин волн) с частотой $\omega_0 - \omega_i$ соответствует «фиолетовый» спутник [34]) с частотой $\omega_0 + \omega_i$. При обычных температурах интенсивность фиолетовых спутников

[33]) В зарубежной литературе это явление обычно называют **эффектом Рамана.**

[34]) Красные спутники называют также стоксовскими, а фиолетовые — антистоксовскими.

значительно меньше, чем красных. С повышением температуры интенсивность фиолетовых спутников быстро растет.

Согласно квантовой теории процесс рассеяния света можно рассматривать как неупругое соударение фотонов с молекулами. При соударении фотон может отдать молекуле или получить от нее только такие количества энергии, которые равны разностям двух ее энергетических уровней. Если при столкновении с фотоном молекула переходит из состояния с энергией $E'$ в состояние с энергией $E''$ $(E'' > E')$, то энергия фотона после рассеяния станет равной $\hbar\omega_0 - \Delta E$, где $\Delta E = E'' - E'$. Соответственно частота фотона уменьшится на $\omega_1 = \Delta E/\hbar$ — возникает красный спутник. Если первоначально молекула находилась в состоянии с энергией $E''$, она может перейти в результате соударения с фотоном в состояние с энергией $E'$, отдав избыток энергии $\Delta E = E'' - E'$ фотону. В результате энергия фотона станет равной $\hbar\omega_0 + \Delta E$ и частота увеличится на $\omega_1$. Рассеяние фотона $\hbar\omega_0$ может сопровождаться переходами молекулы между различными вращательными или колебательными уровнями $E'$, $E''$, $E'''$ и т. д. В итоге возникает ряд симметрично расположенных спутников.

При обычных температурах число молекул, находящихся в основном состоянии, намного превосходит число молекул, находящихся в возбужденных состояниях. Поэтому столкновения, сопровождающиеся уменьшением энергии молекулы, происходят гораздо реже, чем переходы, сопровождающиеся увеличением энергии. Этим объясняется малая интенсивность фиолетовых спутников по сравнению с красными. При повышении температуры число возбужденных молекул быстро растет, что приводит к увеличению интенсивности фиолетовых спутников.

Исследование комбинационного рассеяния дает много сведений о строении молекул. С помощью этого метода определяются собственные частоты колебаний молекулы; он позволяет также судить о характере симметрии молекулы. В кристаллах комбинационное рассеяние света обычно связывают с так называемой оптической ветвью колебаний кристаллической решетки (см. § 6.4). Спектры комбинационного рассеяния настолько характерны для молекул, что с их помощью осуществляют анализ сложных молекулярных смесей, особенно органических молекул, анализ которых химическими методами весьма затруднен или даже невозможен.

Отметим, что комбинационное рассеяние относится к числу так называемых нелинейных эффектов (см. § 5.17).

## 5.15. Вынужденное излучение

До сих пор мы рассматривали только два вида переходов атомов между энергетическими уровнями: спонтанные (самопроизвольные) переходы с более высоких на более низкие уровни и происходящие под действием излучения (вынужденные) переходы с более низких на более высокие уровни. Переходы первого вида приводят к спонтанному испусканию атомами фотонов, переходы второго вида обусловливают поглощение излучения веществом.

В 1918 г. Эйнштейн обратил внимание на то, что двух указанных видов излучения недостаточно для объяснения существования равновесия между излучением и веществом. Действительно, вероятность спонтанных переходов определяется лишь внутренними свойствами атомов и, следовательно, не может зависеть от интенсивности падающего излучения, в то время как вероятность «поглощательных» переходов зависит как от свойств атомов, так и от интенсивности падающего излучения. Для возможности установления равновесия при произвольной интенсивности падающего излучения необходимо существование «испускательных» переходов, вероятность которых возрастала бы с увеличением интенсивности излучения, т. е. «испускательных» переходов, вызываемых излучением. Возникающее в результате таких переходов излучение называется *вынужденным* или *индуцированным*.

Исходя из термодинамических соображений, Эйнштейн доказал, что вероятность вынужденных переходов, сопровождающихся излучением, должна быть равна вероятности вынужденных переходов, сопровождающихся поглощением света. Таким образом, вынужденные переходы могут с равной вероятностью происходить как в одном, так и в другом направлении.

Вынужденное излучение обладает весьма важными свойствами. Направление его распространения в точности совпадает с направлением распространения вынуждающего излучения, т. е. внешнего излучения, вызвавшего переход. То же самое относится к частоте, фазе и поляризации вынужденного и вынуждающего излучений. Следовательно, вынужденное и вынуждающее излучения ока-

зываются строго когерентными. Эта особенность вынужденного излучения лежит в основе действия усилителей и генераторов света, называемых лазерами (см. следующий параграф).

Пусть $P_{nm}$ — вероятность вынужденного перехода атома в единицу времени с энергетического уровня $E_n$ на уровень $E_m$, а $P_{mn}$ — вероятность обратного перехода. Выше было указано, что при одинаковой интенсивности излучения $P_{nm} = P_{mn}$. Вероятность вынужденных переходов пропорциональна плотности энергии $u_\omega$ вынуждающего переход электромагнитного поля[35]), приходящейся на частоту $\omega$, соответствующую данному переходу ($\omega = (E_n - E_m)/\hbar$). Обозначив коэффициент пропорциональности буквой $B$, получим

$$P_{nm} = B_{nm} u_\omega, \quad P_{mn} = B_{mn} u_\omega. \tag{5.72}$$

Величины $B_{nm}$ и $B_{mn}$ называются **коэффициентами Эйнштейна**. Согласно сказанному выше $B_{nm} = B_{mn}$.

Основываясь на равновероятности вынужденных переходов $n \to m$ и $m \to n$, Эйнштейн дал весьма простой вывод формулы Планка. Равновесие между веществом и излучением будет достигнуто при условии, что число атомов $N_{nm}$, совершающих в единицу времени переход из состояния $n$ в состояние $m$, будет равно числу атомов $N_{mn}$, совершающих переход в обратном направлении. Допустим, что $E_n > E_m$. Тогда переходы $m \to n$ смогут происходить только под воздействием излучения, переходы же $n \to m$ будут совершаться как вынужденно, так и спонтанно. Следовательно,

$$N_{mn} = N_{mn}^{(\text{вынужд})}, \quad N_{nm} = N_{nm}^{(\text{вынужд})} + N_{nm}^{(\text{спонт})}.$$

Условие равновесия имеет вид

$$N_{mn}^{(\text{вынужд})} = N_{nm}^{(\text{вынужд})} + N_{nm}^{(\text{спонт})}. \tag{5.73}$$

Согласно (5.72)

$$N_{mn}^{(\text{вынужд})} = P_{mn} N_m = B_{mn} u_\omega N_m, \tag{5.74}$$

$$N_{nm}^{(\text{вынужд})} = P_{nm} N_n = B_{nm} u_\omega N_n \tag{5.75}$$

($N_m$ и $N_n$ — числа атомов в состояниях $m$ и $n$).

[35]) В § 1.7 равновесное значение $u_\omega$ мы обозначали через $u(\omega, T)$.

Обозначим вероятность спонтанного перехода атома в единицу времени из состояния $n$ в состояние $m$ через $A_{nm}$. Тогда число атомов, совершающих в единицу времени спонтанный переход $n \to m$, определится выражением

$$N_{nm}^{(\text{спонт})} = A_{nm} N_n. \tag{5.76}$$

Подстановка выражений (5.74)–(5.76) в соотношение (5.73) приводит к равенству

$$B_{mn} u_\omega N_m = B_{nm} u_\omega N_n + A_{nm} N_n.$$

Определяемое этим равенством значение $u_\omega$ представляет собой равновесное значение этой величины, т. е. $u(\omega, T)$. Таким образом,

$$u(\omega, T) = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} N_m - B_{nm} N_n} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{N_m/N_n - 1}$$

(мы учли, что $B_{mn} = B_{nm}$).

Равновесное распределение атомов по состояниям с различной энергией определяется законом Больцмана, согласно которому

$$\frac{N_m}{N_n} = \exp\frac{E_n - E_m}{kT} = \exp\frac{\hbar\omega}{kT}.$$

Следовательно, мы приходим к формуле

$$u(\omega, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{5.77}$$

Для определения множителя $A_{nm}/B_{nm}$ Эйнштейн воспользовался тем, что при малых частотах выражение (5.77) должно переходить в формулу Рэлея–Джинса. В случае $\hbar\omega \ll kT$ можно произвести замену $\exp(\hbar\omega/kT) \approx$ $\approx 1 + \hbar\omega/kT$, в результате чего (5.77) принимает вид

$$u(\omega, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{kT}{\hbar\omega}.$$

Сравнение с формулой (1.51) дает для $A_{nm}/B_{nm}$ значение

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

Подстановка этого значения в (5.77) приводит к формуле Планка (см. (1.60)).

## 5.16. Лазеры

В 50-х годах были созданы устройства, при прохождении через которые электромагнитные волны усиливаются за счет открытого Эйнштейном вынужденного излучения (см. предыдущий параграф). В 1953 г. Басовым[36]) и Прохоровым[37]) и независимо от них Таунсом[38]) и Вебером были созданы первые молекулярные генераторы, работающие в диапазоне сантиметровых волн и получившие название мазеров. Слово «мазер» происходит от первых букв английского названия Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (усиление микроволн с помощью вынужденного излучения). В 1960 г. Мейманом[39]) был создан первый аналогичный прибор, работающий в оптическом диапазоне, — лазер (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation — усиление света с помощью вынужденного излучения). Лазеры называют также оптическими квантовыми генераторами.

В предыдущем параграфе мы выяснили, что воздействующий на вещество свет частоты $\omega$, совпадающей с одной из частот $(E_n - E_m)/\hbar$ атомов вещества $(E_n > E_m)$, будет вызывать два процесса: 1) вынужденный переход $m \to n$ и 2) вынужденный переход $n \to m$. Первый процесс приводит к поглощению света и ослаблению падающего пучка, второй — к увеличению интенсивности падающего пучка. Результирующее изменение интенсивности светового пучка зависит от того, какой из двух процессов преобладает.

В случае термодинамического равновесия распределение атомов по различным энергетическим состояниям определяется законом Больцмана:

$$N_i = \frac{N \exp(-E_i/kT)}{\sum\limits_j \exp(-E_j/kT)} = C \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \qquad (5.78)$$

где $N$ — полное число атомов, $N_i$ —число атомов, находящихся при температуре $T$ в состоянии с энергией $E_i$

[36]) Николай Геннадиевич Басов (р. в 1922 г.) — советский физик.

[37]) Александр Михайлович Прохоров (р. в 1916 г.) — советский физик.

[38]) Чарлз Хард Таунс (р. в 1915 г.) — американский физик.

[39]) Теодор Гарольд Мейман (р. в 1927 г.) — американский физик.

(для простоты мы предположили, что все энергетические уровни не являются вырожденными). Из этой формулы следует, что с увеличением энергии состояния населенность уровня, т. е. количество атомов в данном состоянии, уменьшается. Число переходов между двумя уровнями пропорционально населенности исходного уровня. Следовательно, в системе атомов, находящейся в термодинамическом равновесии, поглощение падающей световой волны будет преобладать над вынужденным излучением, так что падающая волна при прохождении через вещество ослабляется.

Для того чтобы получить усиление падающей волны, нужно обратить населенность энергетических уровней, т. е. сделать так, чтобы в состоянии с большей энергией $E_n$ находилось большее число атомов, чем в состоянии с меньшей энергией $E_m$. В этом случае говорят, что данная совокупность атомов имеет **инверсную населенность**. Согласно формуле (5.78)

$$\frac{N_n}{N_m} = \exp\left(-\frac{E_n - E_m}{kT}\right).$$

В случае инверсной населенности $N_n/N_m > 1$ при $E_n - E_m > 0$. Распространив формально на этот случай распределение (5.78), мы получим для $T$ отрицательное значение. Поэтому состояния с инверсной населенностью называют иногда состояниями с отрицательной температурой.

Изменение интенсивности света при прохождении через поглощающую среду описывается формулой

$$I = I_0 \exp(-\varkappa l). \tag{5.79}$$

В веществе с инверсной населенностью энергетических уровней вынужденное излучение может превысить поглощение света атомами, вследствие чего падающий пучок света при прохождении через вещество будет усиливаться. В случае усиления падающего пучка явление протекает так, как если бы коэффициент поглощения $\varkappa$ в формуле (5.79) стал отрицательным. Соответственно совокупность атомов с инверсной населенностью можно рассматривать как среду с отрицательным коэффициентом поглощения.

Создание лазера стало возможным после того, как были найдены способы осуществления инверсной населенности уровней в некоторых веществах. В построенном Мейманом первом лазере рабочим телом был цилиндр из розового рубина. Диаметр стержня был примерно 1 см, длина — около 5 см. Торцы рубинового стержня были тщательно отполированы и представляли собой строго параллельные друг другу зеркала. Один торец покрывался плотным непрозрачным слоем серебра, другой торец — таким слоем серебра, который пропускал около 8 % упавшей на него энергии.

Рубин представляет собой окись алюминия $Al_2O_3$, в которой некоторые из атомов алюминия замещены атомами хрома. При поглощении света ионы хрома $Cr^{3+}$ (в таком виде хром находится в кристалле рубина) переходят в возбужденное состояние. Обратный переход в основное состояние происходит в два этапа. На первом этапе возбужденные ионы отдают часть своей энергии кристаллической решетке и переходят в метастабильное состояние. Переход из метастабильного состояния в основное запрещен правилами отбора. Поэтому среднее время жизни иона в метастабильном состоянии ($\sim 10^{-3}$ с) примерно в $10^5$ раз превосходит время жизни в обычном возбужденном состоянии. На втором этапе ионы из метастабильного состояния переходят в основное[40]), излучая фотон с $\lambda = 6943$ Å. Под действием фотонов такой же длины волны, т. е. при вынужденном излучении, переход ионов хрома из метастабильного состояния в основное происходит значительно быстрее, чем при спонтанном излучении.

В лазере рубин освещается импульсной ксеноновой лампой (рис. 5.33), которая дает свет с широкой полосой частот. При достаточной мощности лампы большинство ионов хрома переводится в возбужденное состояние. Процесс сообщения рабочему телу лазера энергии для перевода атомов в возбужденное состояние называется накачкой. На рис. 5.34 дана схема уровней иона хрома $Cr^{3+}$ (уровень *3* представляет собой полосу, образованную совокупностью близко расположенных уровней).

Возбуждение ионов за счет накачки изображено стрелкой $W_{13}$. Время жизни уровня *3* очень мало ($\sim 10^{-8}$ с).

[40]) Правила отбора не являются абсолютно строгими. Вероятность запрещенных переходов значительно меньше, чем разрешенных, но все же отлична от нуля.

В течение этого времени некоторые ионы перейдут спонтанно из полосы *3* на основной уровень *1*. Такие переходы показаны стрелкой $A_{31}$. Однако большинство ионов перейдет на метастабильный уровень *2* (вероятность перехода, изображенного стрелкой $S_{32}$, значительно больше, чем

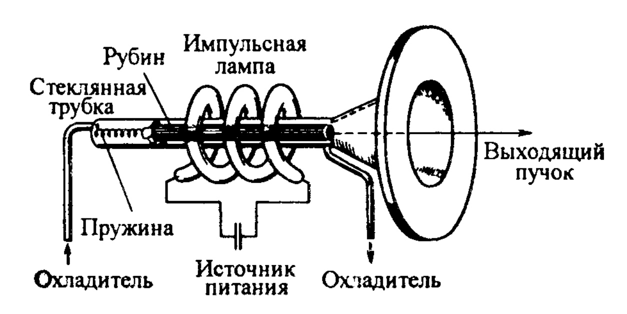



Рис. 5.33

перехода $A_{31}$). При достаточной мощности накачки число ионов хрома, находящихся на уровне *2*, становится больше числа ионов на уровне *1*. Следовательно, возникает инверсия населенностей уровней *1* и *2*.

Стрелка $A_{21}$ изображает спонтанный переход с метастабильного уровня на основной. Излученный при этом фотон может вызвать вынужденное испускание дополнительных фотонов (переход $W_{21}$), которые в свою очередь вызовут вынужденное излучение, и т. д. В результате образуется каскад фотонов. Напомним, что фотоны, возникающие при вынужденном излучении, летят в том же направлении, что и падающие фотоны. Фотоны, направления движения которых образуют малые углы с осью кристаллического стержня, испытывают многократные отражения от торцов образца. Поэтому путь их в кристалле будет очень большим, так что каскады фотонов в направлении оси получают особенное развитие. Фотоны, испущенные спонтанно в других направлениях, выходят из кристалла через его боковую поверхность.

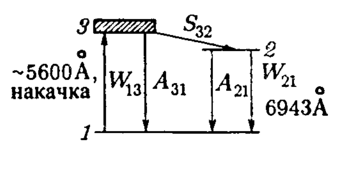



Рис. 5.34

Процесс образования каскада изображен схематически на рис. 5.35. До начала импульса ионы хрома находятся в основном состоянии (черные кружки на рис. 5.35 *а*). Свет

накачки (сплошные стрелки на рис. 5.35 *б*) переводит большинство ионов в возбужденное состояние (светлые кружки). Каскад начинает развиваться, когда возбужденные ионы спонтанно излучают фотоны (штриховые стрелки на рис. 5.35 *в*) в направлении, параллельном оси кристалла (фотоны, испущенные по другим направлениям, выходят из кристалла). Фотоны размножаются за счет вынужденного излучения. Этот процесс развивается (рис. 5.35 *г* и *д*), так как фотоны многократно проходят вдоль кристалла, отражаясь от его торцов. При каждом отражении от частично прозрачного торца небольшая доля (8 %) светового

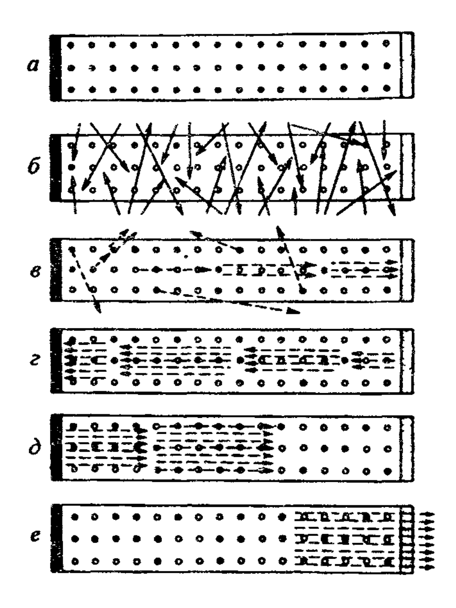



Рис. 5.35

пучка выходит из кристалла. Поэтому после каждого акта накачки возникает вспышка лазерного излучения, состоящая из ряда импульсов, общая продолжительность которых равна нескольким микросекундам.

Лазеры на рубине работают в импульсном режиме (с частотой порядка нескольких импульсов в минуту). Внутри кристалла выделяется большое количество тепла. По-

этому его приходится интенсивно охлаждать, что осуществляется с помощью жидкого воздуха.

В 1961 г. Джаваном[41]) был создан первый газовый лазер, работающий на смеси гелия и неона. В 1963 г. были созданы первые полупроводниковые лазеры. В настоящее время список лазерных материалов насчитывает много десятков твердых и газообразных веществ.

Излучение лазеров отличается рядом замечательных особенностей. Для него характерны: 1) строгая монохроматичность ($\Delta\lambda \sim 0{,}1$ Å); 2) высокая временна́я и пространственная когерентность; 3) большая интенсивность и 4) узость пучка. Угловая ширина генерируемого лазером светового пучка столь мала, что, используя телескопическую фокусировку, можно получить на лунной поверхности пятно света диаметром всего лишь 3 км. Большая мощность и узость пучка позволяют при фокусировке с помощью линзы получить плотность потока энергии, в 1000 раз превышающую плотность потока энергии, которую можно получить фокусировкой солнечного света. Пучки света со столь высокой плотностью мощности можно использовать для механической обработки и сварки, для воздействия на ход химических реакций и т. д.

Высокая когерентность излучения открывает широкие перспективы использования лазеров для целей радиосвязи, в частности для направленной радиосвязи в космосе. Если будет найден метод модуляции и демодуляции света, один лазер сможет заменить по объему передаваемой информации всю систему связи между восточным и западным побережьями США.

Высокая когерентность лазерного пучка позволила осуществить такое замечательное явление, как голография.

Сказанное далеко не исчерпывает всех возможностей лазера. Он является совершенно новым типом источника света, и пока еще трудно представить себе все возможные области его применения.

## 5.17. Нелинейная оптика

В световой волне, получаемой с помощью обычных (нелазерных) источников света, напряженность электрического поля $E$ пренебрежимо мала по сравнению с напря-

[41]) Али Джаван (р. в 1926 г.) — американский физик. Родился в Тегеране. В 1948 г. переехал в США.

женностью внутреннего микроскопического поля, действующего на электроны в веществе. По этой причине оптические свойства среды (в частности, показатель преломления) и характер подавляющего большинства оптических явлений не зависят от интенсивности света. В таком случае распространение световых волн описывается линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому долазерную оптику можно назвать линейной. Отметим, что принцип суперпозиции световых волн (выражаемый в геометрической оптике законом независимости световых лучей) справедлив только в области линейной оптики. Правда, и до создания лазеров были известны нелинейные явления в оптике. К их числу относится, например, комбинационное рассеяние света. При комбинационном рассеянии наблюдается преобразование частоты монохроматической световой волны, что является признаком нелинейности процесса. Однако в подавляющем большинстве случаев оптические процессы были линейными.

После создания лазеров положение в оптике существенно изменилось. Квантовые генераторы позволяют получить световые волны с напряженностью поля, почти такой же, как и напряженность микроскопического поля в атомах. При таких полях показатель преломления зависит от напряженности $E$. В этом случае нарушается принцип суперпозиции, различные волны, распространяющиеся в среде, оказывают влияние друг на друга, и возникает ряд нелинейных оптических явлений. Опишем вкратце некоторые из них.

**Нелинейное отражение света.** При больших интенсивностях в отраженном свете появляется излучение на второй гармонике падающего излучения, т. е. кроме отраженного луча, имеющего частоту $\omega$, равную частоте падающего света, наблюдается отраженный луч частоты $2\omega$. Этот луч не подчиняется обычному закону отражения, вследствие чего направление отраженного луча частоты $2\omega$ не совпадает с направлением отраженного луча частоты $\omega$.

**Самофокусировка света.** При обычных интенсивностях первоначально параллельный ограниченный пучок света претерпевает при своем распространении в вакууме или в какой-либо среде так называемое дифракционное расплывание, в результате чего возникает дифракционная расходимость пучка. Оказывается, что при распространении световых пучков в жидкостях и некоторых кри-

сталлах с увеличением мощности пучка расходимость его уменьшается. При некоторой мощности, называемой критической, пучок распространяется, не испытывая расходимости. Наконец, при мощности, большей критической, пучок сжимается — происходит самофокусирование пучка в среде. Это явление обусловлено тем, что с ростом напряженности $E$ увеличивается показатель преломления. Поэтому среда в области, занимаемой пучком, становится оптически более плотной, что приводит к изгибанию лучей к оси пучка, т. е. к сжатию пучка.

**Оптические гармоники.** При рассеянии лазерного пучка в жидкостях и кристаллах, кроме света с частотой падающего излучения $\omega$, наблюдается рассеянный свет с частотами, кратными первоначальной частоте (т. е. с частотами $2\omega$, $3\omega$ и т. д.). Эти компоненты рассеянного света называются оптическими гармониками. Интенсивность оптических гармоник может быть весьма значительной; в некоторых кристаллах излучение гармоник может составлять до 50 % мощности рассеянного излучения.

**Многофотонные процессы.** При обычных интенсивностях в элементарном акте взаимодействия света с веществом поглощается только один фотон, энергия которого $\hbar\omega$ совпадает с разностью энергетических уровней $E_2 - E_1$ атома или молекулы. При больших интенсивностях в элементарном акте взаимодействия могут поглощаться два или более фотонов. В этом случае может происходить поглощение света не только частоты $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$, но также и частот $\omega/2$, $\omega/3$ и т. д. Такое поглощение называется многофотонным (в частности, двухфотонным, трехфотонным и т. д.).

В одном элементарном акте взаимодействия света с веществом могут поглощаться два фотона неодинаковой частоты. Это происходит в случае, когда световое поле создается двумя независимыми монохроматическими источниками. Если сумма частот этих источников удовлетворяет условию $\omega_1 + \omega_2 = (E_2 - E_1)/\hbar$, наблюдается заметное поглощение излучения обеих частот. Для этого не обязательно, чтобы оба излучения были большой мощности. Достаточно, чтобы была велика их суммарная интенсивность. Поэтому можно наблюдать многофотонное поглощение при наложении света от лазера и нелазерного источника со сплошным спектром.

К числу многофотонных процессов относится также многофотонный фотоэффект (многофотонная ионизация атомов). В то время как обычный (однофотонный) фотоэффект наблюдается при частотах, при которых энергия фотона больше энергии ионизации атома, многофотонный фотоэффект может происходить при частотах, в $n$ раз меньших ($n$ — число фотонов, участвующих в элементарном акте взаимодействия). Удалось надежно зарегистрировать семифотонную ионизацию инертных газов.

Мы привели далеко не полный перечень уже обнаруженных нелинейных явлений. Однако он достаточен для того, чтобы составить представление о том, как бурно развивается новая область оптики — нелинейная оптика.

# Часть III
# Физика твердого тела

## Глава 6
## Колебания кристаллической решетки

В данной части курса под твердыми телами подразумеваются кристаллические вещества. Некоторые сведения о кристаллах были даны в гл. 4 кн. 3, где приведены сведения о классификации кристаллов, физических типах кристаллических решеток, дефектах в кристаллах. В кн. 2 была изложена классическая теория электропроводности металлов (гл. 11), а также приведены некоторые сведения о магнитных свойствах тел (гл. 7). Естественно, что здесь мы не станем повторять все эти сведения и ограничимся лишь изложением материала, который не затрагивался в предыдущих книгах курса.

### 6.1. Кристаллическая решетка. Индексы Миллера

Идеальная кристаллическая решетка образована из тождественных элементарных ячеек. Каждая такая ячейка представляет собой в общем случае косоугольный параллелепипед, построенный на трех векторах: **a**, **b**, **c**. Эти векторы можно принять за орты координатный осей. Модули векторов являются периодами идентичности в направлениях соответствующих осей.

Выбор координатных осей, вообще говоря, неоднозначен. Один и тот же кристалл можно представить сложенным из различных элементарных параллелепипедов. Принято выбирать оси наиболее простым способом с учетом симметрии кристалла.

Для аналитического описания геометрических элементов кристалла, т.е. точек, прямых (направлений) и плоскостей, применяется особая символика.

Возьмем точку с координатами $x$, $y$, $z$ [1]). В качестве индексов точки принимается совокупность величин $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, которые заключаются в двойные квадратные скобки: $\left[\left[\frac{x}{a}\ \frac{y}{b}\ \frac{z}{c}\right]\right]$. Обычно имеют в виду точки, расположенные

[1]) В общем случае эти координаты косоугольные, а не декартовы.

в пределах ячейки, примыкающей к началу координат. В этом случае индексы будут числами, не превышающими 1. Так, например, центру кристаллической ячейки соответствуют индексы $\left[\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right]\right]$, центру грани, лежащей в плоскости $yz$, — индексы $\left[\left[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right]\right]$.

Направление в кристалле можно задать с помощью прямой, проходящей через начало координат. Направление такой прямой определяется наименьшими целыми числами $m$, $n$, $p$, пропорциональными индексам любой точки, через которую проходит прямая [2]):

$$m : n : p = \frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c}.$$

Числа $m$, $n$, $p$ называются **индексами направления** и заключаются в одинарные квадратные скобки: $[m\,n\,p]$. Таким образом, направление прямой, проходящей через начало координат и через точку $\left[\left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,1\right]\right]$, обозначается символом $[2\,3\,6]$.

Если какое-то из чисел $m$, $n$, $p$ оказывается отрицательным, знак минус ставится не перед соответствующим числом, а над ним. Например, направление, противоположное оси $y$, обозначается символом $[0\,\bar{1}\,0]$.

Положение плоскости в кристалле можно определить, задав отрезки $u$, $v$, $w$, отсекаемые плоскостью на координатных осях. Однако в случае плоскостей, проходящих через узлы кристаллической решетки, оказывается более удобным задавать положение плоскости с помощью наименьших целых чисел $h$, $k$, $l$, обратных отрезкам $u$, $v$, $w$:

$$h : k : l = \frac{1}{u} : \frac{1}{v} : \frac{1}{w}.$$

Числа $h$, $k$, $l$ носят название **индексов Миллера**. Записывая символ плоскости, индексы Миллера заключают в круглые скобки: $(h\,k\,l)$. Пусть, например, отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях, равны $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и 1. Обратными величинами будут 2, $\frac{3}{2}$ и 1. Умножив эти числа на 2, получим индексы Миллера: (4 3 2).

---

[2]) Обычно представляют интерес направления, проходящие через узлы кристаллической решетки. Поэтому индексы относятся как целые числа.

В случае, когда какой-либо отрезок, отсекаемый плоскостью на координатной оси, оказывается отрицательным, знак минус ставится не перед, а над соответствующим индексом Миллера. Если плоскость параллельна координатной оси, отсекаемый ею отрезок бесконечно велик, так что соответствующий индекс равен нулю.

Заметим, что в случае кубических кристаллов плоскость $(h\,k\,l)$ перпендикулярна к прямой $[h\,k\,l]$. Для кристаллов других систем это, вообще говоря, не имеет места.

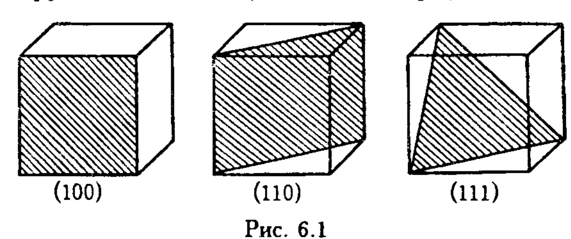



Рис. 6.1

На рис. 6.1 приведены индексы Миллера для основных плоскостей кубического кристалла (ось $x$ направлена «на нас», ось $y$ — вправо, ось $z$ — вверх.).

## 6.2. Теплоемкость кристаллов. Теория Эйнштейна

Согласно классическим представлениям кристалл, состоящий из $N$ атомов, является системой с $3N$ колебательными степенями свободы, на каждую из которых приходится в среднем энергия $kT$ ($kT/2$ в виде кинетической и $kT/2$ в виде потенциальной энергии). Из этих представлений вытекает закон Дюлонга и Пти, который утверждает, что молярная теплоемкость всех химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова и равна $3R$ (см. § 4.5 кн. 3). Этот закон выполняется достаточно хорошо только при сравнительно высоких температурах. При низких температурах теплоемкость кристаллов убывает, стремясь к нулю при приближении к 0 К.

Значение $kT$ для средней энергии колебательного движения получается в предположении, что энергия гармонического осциллятора может принимать непрерывный ряд значений. В § 4.10 мы установили, что колебательная энергия квантуется. Это приводит к тому, что средняя энергия колебания оказывается отличной от $kT$. Согласно формуле (4.60) энергия гармонического осциллятора мо-

жет иметь значения

$$\varepsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Приняв, что распределение осцилляторов по состояниям с различной энергией подчиняется закону Больцмана, можно найти среднее значение энергии гармонического осциллятора $\langle\varepsilon\rangle$. Проделав выкладки, аналогичные тем, которые привели нас к формуле (1.59), получим для $\langle\varepsilon\rangle$ выражение, отличающееся от (1.59) лишь тем, что оно имеет дополнительное слагаемое $\hbar\omega/2$. Таким образом,

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{6.1}$$

Теория теплоемкости кристаллических тел, учитывающая квантование колебательной энергии, была создана Эйнштейном (1907) и впоследствии усовершенствована Дебаем (1912).

Эйнштейн отождествил кристаллическую решетку из $N$ атомов с системой $3N$ независимых гармонических осцилляторов с одинаковой собственной частотой $\omega$. Существование нулевой энергии колебаний было установлено значительно позже, лишь после создания квантовой механики. Поэтому Эйнштейн исходил из планковского значения энергии гармонического осциллятора $\varepsilon_n = n\hbar\omega$. Соответственно в использованном Эйнштейном выражении для $\langle\varepsilon\rangle$ слагаемое $\hbar\omega/2$ отсутствовало.

Умножив второе слагаемое выражения (6.1) на $3N$, Эйнштейн получил для внутренней энергии кристалла формулу

$$U = \frac{3N\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{6.2}$$

Продифференцировав выражение (6.2) по температуре, Эйнштейн нашел теплоемкость кристалла:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3N\hbar\omega}{[\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^2}\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\frac{\hbar\omega}{kT^2}. \tag{6.3}$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Высокие температуры ($kT \gg \hbar\omega$). В этом случае можно положить $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1 + \hbar\omega/kT$ в знаменателе и $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1$ — в числителе формулы (6.3). В ре-

зультате для теплоемкости получается значение

$$C = 3Nk.$$

Таким образом, мы пришли к закону Дюлонга и Пти.

2. Низкие температуры ($kT \ll \hbar\omega$). При этом условии единицей в знаменателе выражения (6.3) можно пренебречь. Тогда формула для теплоемкости принимает вид

$$C = \frac{3N(\hbar\omega)^2}{kT^2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right). \tag{6.4}$$

Экспоненциальный множитель изменяется значительно быстрее, чем $T^2$. Поэтому при приближении к абсолютному нулю выражение (6.4) будет стремиться к нулю практически по экспоненциальному закону.

Опыт показывает, что теплоемкость кристаллов изменяется вблизи абсолютного нуля не экспоненциально, а по закону $T^3$. Следовательно, теория Эйнштейна дает лишь качественно правильный ход теплоемкости при низких температурах. Количественного согласия с опытом удалось достигнуть Дебаю.

## 6.3. Колебания систем с большим числом степеней свободы

Чтобы разобраться в теории Дебая, нужно знать решение задачи о малых колебаниях системы с большим числом степеней свободы. В настоящем параграфе мы рассмотрим результаты решения этой задачи, не касаясь способов ее решения.

Положение системы с $s$ степенями свободы может быть задано с помощью $s$ величин $q_i$, которые называются *обобщенными координатами* системы. Роль обобщенных координат могут выполнять длины, углы, площади и т. д. Обобщенные координаты одной и той же системы можно выбирать различными способами. Можно показать, что такая система имеет $s$ собственных частот $\omega_\alpha$ ($\alpha$ — номер собственной частоты, пробегающий значения 1, 2, ..., $s$). При произвольном выборе обобщенных координат $q_i$ общее решение уравнений движения имеет вид

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{s} A_{i\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha) \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Следовательно, каждая из функций $q_i$ представляет собой, вообще говоря, суперпозицию $s$ гармонических колебаний с частотами $\omega_\alpha$.

Энергия системы определяется выражением

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{s} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{s} b_{lm}q_l q_m,$$

где первая сумма дает кинетическую, а вторая — потенциальную энергию системы; $a_{ik}$ и $b_{lm}$ — размерные коэффициенты. Таким образом, в выражение для энергии входят, вообще говоря, не только квадраты обобщенных координат $q_i$ или обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, но и произведения координат или скоростей, соответствующих различным степеням свободы системы.

Оказывается, можно выбрать обобщенные координаты системы так, что изменение каждой из них будет представлять собой простое гармоническое колебание, совершающееся с одной из собственных частот $\omega_\alpha$. Обозначив эти координаты посредством $\xi_\alpha$, можно написать:

$$\xi_\alpha = B_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s).$$

Обобщенные координаты $\xi_\alpha$ совершают независимо друг от друга гармоническое колебание, каждая со своей частотой $\omega_\alpha$. Выбранные так обобщенные координаты называются *нормальными* (или *главными*), а совершаемые ими гармонические колебания — *нормальными колебаниями* системы.

Заметим, что изменения во времени произвольно выбранных обобщенных координат $q_i$ могут быть представлены в виде суперпозиции нормальных колебаний $\xi_\alpha$:

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{s} C_{i\alpha}\xi_\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Выражение для энергии в нормальных координатах имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha\dot{\xi}_\alpha^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s} b_\alpha\xi_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{1}{2}a_\alpha\dot{\xi}_\alpha^2 + \frac{1}{2}b_\alpha\xi_\alpha^2\right).$$

Следовательно, энергия системы равна сумме энергий, приходящихся на каждое из нормальных колебаний в отдельности.

В качестве примера рассмотрим систему из двух одинаковых связанных невесомой пружиной математических маятников (рис. 6.2). Предположим, что маятники могут совершать колебания только в плоскости чертежа, так что система имеет две степени свободы. Положение системы может быть задано углами отклонения обоих маятников от вертикального положения либо углом отклонения одного из маятников и длиной пружины и т. д. Решение уравнений движения дает для углов отклонения маятников от положения равновесия $\varphi_1$ и $\varphi_2$ выражения:

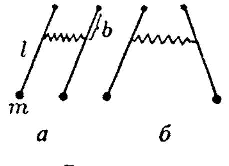


Рис. 6.2

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2),$$
$$\varphi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

Здесь $A_1$, $A_2$, $\delta_1$ и $\delta_2$ — постоянные, определяемые из начальных условий, $\omega_1$ и $\omega_2$ — собственные частоты системы, равные

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{kb^2}{ml^2}}$$

($m$ — масса, $l$ — длина маятников, $k$ — жесткость пружины, $b$ — расстояние от точки подвеса до точки крепления пружины).

Легко сообразить, что колебания $\varphi_1$ и $\varphi_2$ можно представить в виде

$$\varphi_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \varphi_2 = \xi_1 - \xi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1), \\ \xi_2 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Эти две функции представляют собой нормальные колебания данной системы. Если маятники отвести в одну и ту же сторону на одинаковый угол $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ и отпустить без толчка, то будет совершаться только первое нормальное колебание ($A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$), причем $\varphi_1 = \varphi_2 = \xi_1$ (рис. 6.2 *а*). Если отвести маятники на одинаковый угол в противоположные стороны ($\varphi_{10} = -\varphi_{20}$), то будет совершаться только второе нормальное колебание ($A_1 = 0$,

$A_2 \neq 0$), причем $\varphi_1 = -\varphi_2 = \xi_2$ (рис. 6.2 *б*). В первом случае маятники колеблются с частотой $\omega_1$, во втором — с частотой $\omega_2$, большей чем $\omega_1$. При иных начальных условиях будут одновременно совершаться оба нормальных колебания.

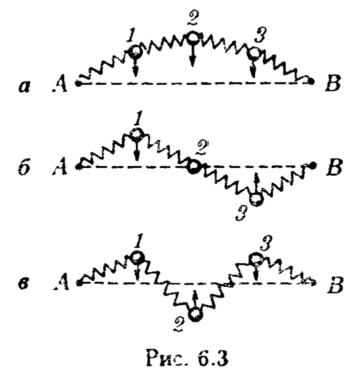


Рис. 6.3

В качестве второго примера рассмотрим систему из трех одинаковых шариков, соединенных невесомыми одинаковыми пружинами (рис. 6.3). Концы пружин $A$ и $B$ закреплены неподвижно. Предполагается, что шарики могут перемещаться только в плоскости чертежа в направлениях, перпендикулярных к линии $AB$. При этих условиях система обладает тремя степенями свободы. Нормальные колебания показаны на рис. 6.3. В случае *а* все шарики движутся в одинаковой фазе; в случае *б* шарики *1* и *3* колеблются в противофазе, шарик *2* неподвижен; в случае *в* шарики *1* и *3* колеблются в одинаковой фазе, а шарик *2* по отношению к ним движется в противофазе.

## 6.4. Теория Дебая

Дебай учел, что колебания атомов в кристаллической решетке не являются независимыми. Смещение одного из атомов из положения равновесия влечет за собой смещения других соседних с ним атомов. Таким образом, кристалл представляет собой систему $N$ упруго связанных друг с другом атомов, обладающую $s = 3N$ степенями свободы.

В § 1.8 кн. 4 мы выяснили, что произвольное колебание струны является суперпозицией гармонических стоячих волн. Следовательно, каждое нормальное колебание струны представляет собой стоячую волну. Аналогично каждому нормальному колебанию кристаллической решетки соответствует стоячая волна, устанавливающаяся в объеме кристаллического тела. Действительно, из-за связи между атомами колебание, возникшее в каком-то месте кристалла, передается от одного атома к другому, в результате чего возникает упругая волна. Дойдя до границы кристалла, волна отражается. При наложении пря-

мой и отраженной волн образуется стоячая волна. Стоячие волны могут возникать лишь для частот (или длин волн), удовлетворяющих определенным условиям. Если взять кристаллическое тело в виде параллелепипеда с ребрами $a$, $b$ и $c$, то эти условия выражаются формулами (1.45).

Число стоячих волн, т. е. нормальных колебаний, частоты которых заключены в интервале от $\omega$ до $\omega + d\omega$, определяется выражением (1.48). Объем кристалла $V$ входит в это выражение в виде отдельного множителя. Поэтому можно говорить о числе нормальных колебаний, приходящихся на единицу объема кристалла. В соответствии с (1.49) это число равно

$$dN_\omega = \frac{\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 v^3}, \qquad (6.6)$$

где $v$ — фазовая скорость волны в кристалле. Подчеркнем, что теперь под $dN_\omega$ мы понимаем число стоячих волн, приходящихся на единицу объема; в § 1.5 это число обозначалось символом $dn_\omega$. Однако в связи с тем, что букву $n$ нам придется использовать для обозначения числа атомов в единице объема, целесообразно вместо $dn_\omega$ писать $dN_\omega$.

Формула (6.6) не учитывает возможных видов поляризации волны. В твердой среде вдоль некоторого направления могут распространяться три разные волны с одним и тем же значением $\omega$, различающиеся направлением поляризации: одна продольная и две поперечные с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний. В соответствии с этим формулу (6.6) нужно видоизменить следующим образом:

$$dN_\omega = \frac{\omega^2\,d\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{v_\parallel^3} + \frac{2}{v_\perp^3}\right).$$

Здесь $v_\parallel$ — фазовая скорость продольных, а $v_\perp$ — поперечных упругих волн. Положим для простоты, что

$$v_\parallel = v_\perp = v.$$

Тогда

$$dN_\omega = \frac{3\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 v^3}. \qquad (6.7)$$

Максимальную частоту $\omega_m$ нормальных колебаний решетки можно найти, приравняв полное число колебаний числу степеней свободы, равному $3n$ ($n$ — число атомов в

единице объема кристалла; напомним, что расчет производится для единицы объема):

$$3n = \int dN_\omega = \int_0^{\omega_m} \frac{3\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 v^3} = \frac{\omega_m^3}{2\pi^2 v^3}.$$

Отсюда

$$\omega_m = v\sqrt[3]{6\pi^2 n}. \tag{6.8}$$

Отметим, что в соответствии с (6.8) наименьшая длина волны, возбуждаемая в кристалле, оказывается равной

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi v}{\omega_m} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \approx 2d,$$

где $d$ — расстояние между соседними атомами в решетке. Этот результат согласуется с тем, что волны, длина которых меньше удвоенного межатомного расстояния, не имеют физического смысла.

Исключив из равенств (6.7) и (6.8) скорость $v$, получим для числа нормальных колебаний $dN_\omega$ в интервале частот $d\omega$, приходящегося на единицу объема кристалла, следующее выражение

$$dN_\omega = 9n\frac{\omega^2\,d\omega}{\omega_m^3}. \tag{6.9}$$

Внутренняя энергия единицы объема кристалла может быть представлена в виде

$$U = \int \langle\varepsilon(\omega)\rangle\,dN_\omega,$$

где $\langle\varepsilon(\omega)\rangle$ — среднее значение энергии нормального колебания частоты $\omega$. Подставив выражение (6.1) для $\langle\varepsilon(\omega)\rangle$ и (6.9) для $dN_\omega$, придем к формуле

$$U = \frac{9n}{\omega_m^3}\int_0^{\omega_m}\left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}\right)\omega^2\,d\omega =$$

$$= U_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3}\int_0^{\omega_m}\frac{\omega^3\,d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{6.10}$$

Здесь $U_0 = 3n((3/8)\hbar\omega_m)$ — энергия нулевых колебаний кристалла.

Производная от $U$ по $T$ дает теплоемкость единицы объема кристалла

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int\limits_0^{\omega_m} \frac{\exp(\hbar\omega/kT)\hbar\omega^4\, d\omega}{[\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^2 kT^2}.$$

Величину $\Theta$, определяемую условием $\hbar\omega_m = k\Theta$, называют характеристической температурой Дебая. По определению

$$\Theta = \frac{\hbar\omega_m}{k}. \tag{6.11}$$

Температура Дебая указывает для каждого вещества ту область, где становится существенным квантование энергии колебаний.

Введем переменную $x = \hbar\omega/kT$. Тогда выражение для теплоемкости примет вид

$$C = 9nk\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int\limits_0^{x_m} \frac{\exp x \cdot x^4\, dx}{(\exp x - 1)^2}, \tag{6.12}$$

где $x_m = \hbar\omega_m/kT = \Theta/T$. При $T \ll \Theta$ верхний предел интеграла будет очень большим, так что его можно приближенно положить равным бесконечности ($x_m \approx \infty$). Тогда интеграл будет представлять собой некоторое число, и теплоемкость $C$ окажется пропорциональной кубу температуры: $C \sim T^3$. Эта приближенная зависимость известна как закон $T^3$ Дебая. При достаточно низких температурах этот закон выполняется во многих случаях очень хорошо.

При $T \gg \Theta$, т. е. при $\hbar\omega_m/kT \ll 1$, формулу (6.10) можно упростить, положив $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1 + \hbar\omega/kT$. Тогда для внутренней энергии получается выражение

$$U = U_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int\limits_0^{\omega_m} \frac{kT}{\hbar\omega}\omega^3\, d\omega = U_0 + 3nkT,$$

а для теплоемкости — значение $C = 3nk$, фигурирующее в законе Дюлонга и Пти.

О согласии теории Дебая с опытом можно судить по рис. 6.4, на котором приведены данные для теплоемкости

алюминия ($\Theta = 396$ K) и меди ($\Theta = 309$ K); $C_\infty$ — классическое значение теплоемкости, получающееся из квантовых формул при $T \to \infty$. Кривые построены по формуле (6.12), кружками показаны экспериментальные точки.

Формула Дебая хорошо передает ход теплоемкости с температурой лишь для тел с простыми кристаллическими решетками, т. е. для химических элементов и неко-

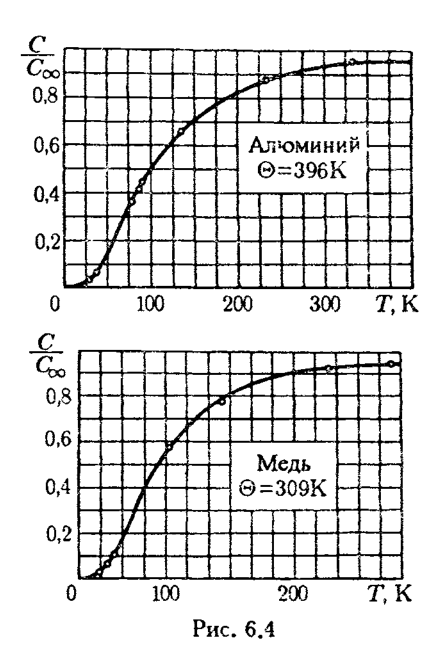



Рис. 6.4

торых простых соединений. К телам с более сложной структурой формула Дебая неприменима. Это объясняется тем, что у таких тел спектр колебаний оказывается чрезвычайно сложным. В рассмотренном нами выше случае простой кристаллической решетки (у которой в элементарной ячейке содержится только один атом) каждому значению волнового вектора **k** соответствовали три значения собственной частоты колебаний решетки (одно для продольной и два совпадающих друг с другом [3]) значения для поперечных волн). Если число атомов в элементар-

[3]) В сильно анизотропном кристалле все три частоты будут различными.

ной ячейке кристалла равно $r$, каждому значению $\mathbf{k}$ соответствует в общем случае $3r$ различных значений $\omega$; следовательно, частота является многозначной функцией волнового вектора, обладающей $3r$ ветвями. Так, например, в случае одномерной цепочки, построенной из чередующихся атомов двух сортов ($r = 2$), зависимость $\omega$ от $k$ имеет вид, показанный на рис. 6.5. Одна из ветвей называется акустической, другая — оптической. Эти ветви различаются дисперсией, т. е. характером зависимости $\omega$ от $k$. Акустическая ветвь при убывании $k$ идет в нуль, оптическая ветвь имеет своим пределом конечное значение $\omega_{20}$.

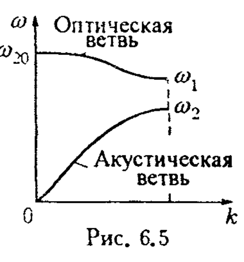


Рис. 6.5

В трехмерном случае из $3r$ ветвей три являются акустическими, остальные $(3r - 3)$ — оптическими. Акустическим ветвям соответствуют звуковые частоты, оптическим — частоты, лежащие в инфракрасной области спектра. При нормальном колебании акустической частоты колеблются относительно друг друга аналогичные атомы, помещающиеся в различных элементарных ячейках. При нормальных колебаниях оптической частоты колеблются относительно друг друга различные атомы внутри каждой из элементарных ячеек; аналогичные атомы различных ячеек находятся при этом на неизменных расстояниях друг от друга.

## 6.5. Фононы

В предыдущем параграфе мы установили, что энергия кристалла может быть представлена как сумма энергий нормальных колебаний решетки:

$$U = \sum_{i=1}^{3Nr} (n_i + 1/2)\hbar\omega_i$$

($N$ — число элементарных ячеек в кристалле, $r$ — число атомов в ячейке).

За вычетом энергии нулевых колебаний энергия нормального колебания частоты $\omega_i$ слагается из порций величины

$$\varepsilon_i = \hbar\omega_i. \qquad (6.13)$$

Эта порция (квант) энергии называется **фононом**. Многие процессы в кристалле (например, рассеяние рентгеновых лучей или нейтронов) протекают так, как если бы фонон обладал импульсом

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \qquad (6.14)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор соответствующего нормального колебания.

Модуль импульса фонона равен

$$p = \hbar k = \hbar\omega/v \qquad (6.15)$$

(ср. с импульсом фотона, равным $\hbar\omega/c$). Здесь $k$ — волновое число, соответствующее колебанию частоты $\omega$, $v$ — скорость упругих волн в кристалле (см. формулу (1.9) кн. 4).

Фонон во многих отношениях ведет себя так, как если бы он был частицей с энергией (6.13) и импульсом (6.14). Однако в отличие от обычных частиц (электронов, протонов, фотонов и т. п.) фонон не может возникнуть в вакууме — для своего возникновения и существования фонон нуждается в некоторой среде. Подобного рода частицы называются **квазичастицами**. Таким образом, фонон является квазичастицей.

Импульс фонона обладает своеобразными свойствами. При взаимодействии фононов друг с другом их импульс может дискретными порциями передаваться кристаллической решетке и, следовательно, не сохраняется. В связи с этим величину (6.14) в случае фононов называют не импульсом, а **квазиимпульсом**.

Таким образом, колебания кристаллической решетки можно представить как фононный газ, заключенный в пределах образца кристалла, подобно тому как электромагнитное излучение можно представить как фотонный газ, заполняющий полость. Формально оба представления весьма схожи — и фотоны, и фононы подчиняются одной и той же статистике. Однако между фотонами и фононами имеется существенное различие: в то время как фотоны являются истинными частицами, фононы являются квазичастицами.

Комбинационное рассеяние света кристаллами (см. § 5.14) можно трактовать как процесс взаимодействия фотона с фононами. Фотон, пролетающий через кристаллическую решетку, может возбудить в ней фонон одной из

частот оптической ветви кристалла. На это фотон израсходует часть своей энергии, вследствие чего его частота уменьшается — возникает красный спутник. Если в кристалле уже был возбужден фонон, пролетающий фотон может поглотить его, увеличив за этот счет свою энергию, — возникает фиолетовый спутник.

## 6.6. Эффект Мёссбауэра

Атомы особенно интенсивно поглощают свет частоты, соответствующей переходу из основного в ближайшее к нему возбужденное состояние. Это явление называется резонансным поглощением. Возвращаясь затем в основное состояние, атомы испускают фотоны резонансной частоты. Соответствующее излучение носит название резонансного излучения или резонансной флуоресценции. Явление резонансной флуоресценции было открыто Вудом[4]) в 1904 г. Вуд обнаружил, что пары натрия при облучении их светом, соответствующим желтой линии натрия, начинают светиться, испуская излучение той же длины волны. Впоследствии аналогичное свечение наблюдалось в парах ртути и во многих других случаях. Вследствие резонансного поглощения свет, прошедший через флуоресцирующее вещество, ослабляется.

Подобно атомам, атомные ядра имеют дискретные уровни энергии, самый низкий из которых называется нормальным, остальные — возбужденными. Переходы между этими уровнями приводят к возникновению коротковолнового электромагнитного излучения, получившего название $\gamma$-лучей (см. § 10.5). Можно было ожидать, что для $\gamma$-лучей существует явление ядерной резонансной флуоресценции, наблюдаемой в видимом свете. Однако наблюдать резонансную флуоресценцию с $\gamma$-лучами долгое время не удавалось. Причина этих неудач заключается в следующем. В § 5.3 было показано, что соответствующие переходу квантовой системы между двумя состояниями линия испускания и линия поглощения смещены относительно друг друга на $2\Delta\omega_R = 2R/\hbar$, где $R$ — энергия отдачи, определяемая формулой (5.23).

Для видимого света сдвиг $2\Delta\omega_R$ на много порядков меньше, чем ширина спектральной линии $\delta\omega$, так что линии испускания и поглощения практически накладываются друг на друга. Иначе обстоит дело в случае $\gamma$-лучей.

[4]) Роберт Уильямс Вуд (1868–1955) — американский физик.

Энергия и импульс $\gamma$-фотона во много раз больше, чем у фотона видимого света. Поэтому значительно больше и энергия отдачи $R$, которая в этом случае должна быть записана следующим образом:

$$R = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_я c^2}, \qquad (6.16)$$

где $m_я$ — масса ядра.

В спектроскопии $\gamma$-лучей принято вместо частот пользоваться энергиями. Поэтому ширину спектральной линии, сдвиг линий и т. п. мы будем выражать в единицах энергии, умножая для этой цели соответствующие частоты на постоянную Планка $\hbar$. В этих единицах естественная ширина спектральной линии будет характеризоваться величиной $\Gamma$ (см. формулу (5.15)), сдвиг линий испускания и поглощения — величиной $2R$, а доплеровское уширение линии — величиной (см. (5.27))

$$2D = 2\frac{v}{c}\Delta E_{nm} \approx 2\frac{v}{c}\hbar\omega. \qquad (6.17)$$

Энергия $\gamma$-квантов обычно бывает заключена в пределах примерно от 10 кэВ до 5 МэВ (что соответствует частотам $\omega$ в пределах $10^{19} \div 10^{22}$ с$^{-1}$ и длинам волн от 1 до $10^{-3}$ Å). Вычислим энергию отдачи $R$ для случая $\hbar\omega$ = 100 кэВ и $m_я = 1,7 \cdot 10^{-22}$ г (атомная масса порядка 100). Значение $m_я c^2$ составит $(1,7 \cdot 10^{-22}) \times$ $\times (9 \cdot 10^{20})$ эрг = 0,15 эрг, т. е. $0,15/(1,6 \cdot 10^{-12}) \approx 10^{11}$ эВ. Следовательно, в соответствии с (6.16)

$$R = \frac{(10^5)^2}{2 \cdot 10^{11}}\ эВ = 0,5 \cdot 10^{-1}\ эВ,$$

а сдвиг линий $2R$ составляет $10^{-1}$ эВ.

Естественная ширина спектральных линий $\Gamma$ определяется формулой (5.14). Типичное время жизни возбужденных состояний ядер составляет $10^{-12}$ с. Такому времени жизни соответствует

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{1,05 \cdot 10^{-27}}{10^{-12}}\ эВ = 1,05 \cdot 10^{-15}\ эрг \approx 10^{-3}\ эВ.$$

Для ядер с массой порядка $10^{-22}$ г средняя скорость теплового движения при комнатной температуре составляет примерно 300 м/с. При такой скорости доплеровская ширина линии с $\hbar\omega$ = 100 кэВ имеет значение (см.

(6.17))

$$2D = 2\frac{3 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^8} 10^5 \text{ эВ} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ эВ}.$$

Сопоставление полученных нами значений Г и $2D$ приводит к выводу, что ширина испускаемых ядрами при комнатной температуре спектральных линий в основном определяется доплеровской шириной и составляет примерно 0,2 эВ. Для сдвига линий испускания и поглощения $2R$ мы получили значение $0,1$ эВ. Таким образом, даже для сравнительно мягких $\gamma$-лучей с энергией 100 кэВ сдвиг линий испускания и поглощения оказывается того же порядка, что и ширина спектральной линии. С увеличением энергии фотона $R$ растет быстрее (как $\omega^2$; см. (6.16)), чем $D$ (которая пропорциональна $\omega$; см. (6.17)).

На рис. 6.6 изображена типичная для $\gamma$-фотонов картина, показывающая взаимное расположение линий испускания и поглощения. Ясно, что лишь небольшая часть испускаемых фотонов (их относительное количество определяется соответствующими ординатами линии испуска-

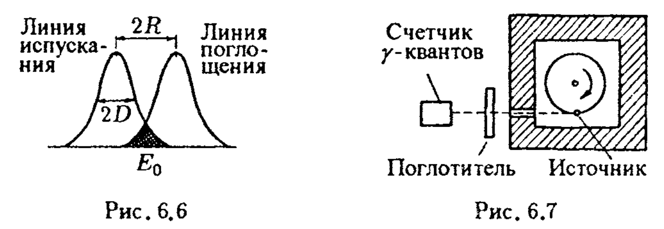



Рис. 6.6 Рис. 6.7

ния) может испытать резонансное поглощение, причем вероятность их поглощения мала (эта вероятность определяется ординатами линии поглощения).

До 1958 г. резонансное поглощение $\gamma$-лучей удавалось наблюдать с помощью устройств, в которых источник $\gamma$-излучения двигался со скоростью $v$ по направлению к поглощающему веществу. Это достигалось путем помещения радиоактивного вещества на ободе вращающегося диска (рис. 6.7). Диск находился внутри массивной свинцовой защиты, поглощающей $\gamma$-лучи. Пучок излучения выходил наружу через узкий канал и попадал на поглощающее вещество. Установленный за поглотителем счетчик $\gamma$-квантов регистрировал интенсивность излучения, прошедшего через поглотитель. Вследствие эффекта До-

плера частота излучаемых источником $\gamma$-лучей увеличивалась на $\Delta\omega = \omega(v/c)$, где $v$ — скорость источника относительно поглотителя. Подобрав надлежащим образом скорость вращения диска, можно было наблюдать резонансное поглощение, которое обнаруживалось по уменьшению интенсивности $\gamma$-лучей, измеряемой счетчиком.

В 1958г. Мёссбауэр[5]) исследовал ядерное резонансное поглощение $\gamma$-лучей $^{191}$Ir (изотопа иридия с массовым числом 191; см. § 10.1). Энергия $\Delta E_{nm}$ соответствующего перехода равна 129 кэВ, энергия отдачи 0,05 эВ, а доплеровское уширение при комнатной температуре $\sim$ 0,1 эВ. Таким образом, линии испускания и поглощения отчасти перекрываются, и резонансное поглощение могло наблюдаться. Чтобы уменьшить поглощение, Мёссбауэр решил охладить источник и поглотитель, рассчитывая таким путем уменьшить доплеровскую ширину и, следовательно, перекрывание линий. Однако вместо ожидаемого уменьшения Мёссбауэр обнаружил усиление резонансного поглощения.

Мёссбауэр создал установку, в которой источник и поглотитель помещались внутри вертикальной трубы, охлаждаемой жидким гелием. Источник был прикреплен к концу длинного штока, совершающего возвратно-поступательное движение. Работая с этой установкой, Мёссбауэр наблюдал исчезновение резонансного поглощения при линейных скоростях источника порядка нескольких сантиметров в секунду. Результаты опыта указывали на то, что у охлажденного $^{191}$Ir линии испускания и поглощения $\gamma$-лучей совпадают и имеют очень малую ширину, равную естественной ширине Г. Это явление упругого (т. е. не сопровождающегося изменением внутренней энергии тела) испускания или поглощения $\gamma$-квантов было названо эффектом Мёссбауэра.

Вскоре эффект Мёссбауэра был открыт в $^{57}$Fe и для ряда других веществ. Ядро $^{57}$Fe замечательно в том отношении, что для него эффект наблюдается при температурах до 1000 °С, так что нет необходимости в охлаждении. Кроме того, $^{57}$Fe отличается чрезвычайно малой естественной шириной линии.

Займемся выяснением физической сути эффекта Мёссбауэра. При испускании $\gamma$-кванта ядром, находящимся в
е

[5]) Рудольф Людвиг Мёссбауэр (р. в 1929 г.) — немецкий физик.

узле кристаллической решетки, энергия перехода $\Delta E_{nm}$ в принципе может распределяться между $\gamma$-квантом, испустившим квант ядром, твердым телом как целым и, наконец, колебаниями решетки. В последнем случае наряду с $\gamma$-квантом возникнут фотоны. Проанализируем эти возможности. Энергия, необходимая для того, чтобы ядро покинуло свое место в решетке, равна по меньшей мере $\sim$ 10 эВ, в то время как энергия отдачи $R$ не превышает нескольких десятых электронвольта. Поэтому атом, ядро которого испустило $\gamma$-квант, не может изменить свое положение в решетке. Энергия отдачи, которую может получить твердое тело как целое, чрезвычайно мала, так что ею можно пренебречь (эту энергию можно оценить, заменив в (6.16) массу ядра массой тела). Таким образом, энергия перехода может распределяться только между $\gamma$-квантом и фононами. Мёссбауэровский переход осуществляется в том случае, если колебательное состояние решетки не изменяется и $\gamma$-квант получает всю энергию перехода.

Итак, при испускании или поглощении $\gamma$-кванта ядром, находящимся в узле кристаллической решетки, могут происходить два процесса:

1) изменение колебательного состояния решетки, т. е. возбуждение фононов,

2) передача импульса $\gamma$-кванта решетке как целому, без изменения ее колебательного состояния, т. е. упругое испускание и поглощение $\gamma$-кванта.

Каждый из этих процессов обладает определенной вероятностью, значение которой зависит от конкретных свойств кристалла, энергии $\gamma$-кванта и температуры. С понижением температуры относительная вероятность упругих процессов возрастает.

Легко показать, что при неупругих процессах должны преимущественно возбуждаться фононы с энергией порядка $\hbar\omega_m = k\Theta$ ($\omega_m$ — максимальная частота колебаний решетки, $\Theta$ — температура Дебая; см. § 6.4). Колебанию частоты $\omega_m$ соответствует длина волны $\lambda_{\min} \approx 2d$ (см. абзац, следующий за формулой (6.8)). В этом случае соседние атомы движутся в противофазе, что может произойти, когда испускающий $\gamma$-квант атом получает всю энергию отдачи $R$ и ударяет затем в соседний атом. Для возбуждения более длинных волн (меньших частот) необходимо, чтобы одновременно было приведено в движение сразу несколько атомов, что является маловероятным. Таким образом, вероятность возбуждения колебаний решетки будет велика

при условии, что энергия отдачи $R$, получаемая при радиоактивном распаде отдельным атомом, равна или больше энергии фонона максимальной частоты: $R \geq \hbar\omega_m = k\Theta$.

У $^{191}$Ir $R \sim k\Theta$. Поэтому для получения измеримого резонансного поглощения нужно с помощью охлаждения уменьшить вероятность возбуждения колебаний решетки. У $^{57}$Fe $R \ll k\Theta$. Благодаря этому уже при комнатной температуре заметная доля ядерных переходов происходит упруго.

На рис. 6.8 показаны типичные спектры испускания и поглощения $\gamma$-квантов ($E$ — энергия $\gamma$-кванта, $I$ — интенсивность, $R$ — средняя энергия отдачи). Оба спектра

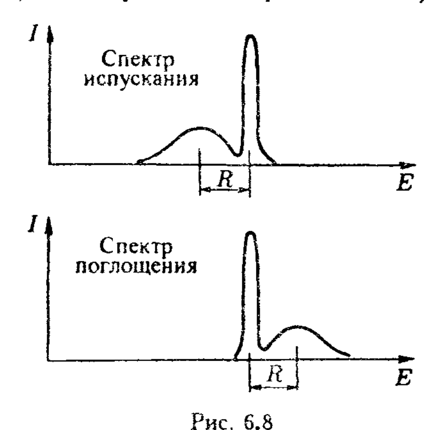



Рис. 6.8

содержат практически совпадающие очень узкие линии, отвечающие упругим процессам. Эти линии располагаются на фоне широких смещенных линий, обусловленных процессами, сопровождающимися изменением колебательного состояния решетки. С понижением температуры фон ослабляется, а доля упругих процессов возрастает, но никогда не достигает единицы.

Эффект Мёссбауэра нашел многочисленные применения. В ядерной физике он используется для нахождения времени жизни возбужденных состояний ядер (через Г), а также для определения спина, магнитного момента и электрического квадрупольного момента ядер. В физике твердого тела эффект Мёссбауэра применяется для изучения динамики кристаллической решетки и для исследования внутренних электрических и магнитных полей в кристаллах.

Благодаря крайне малой ширине мёссбауэровских линий метод движущегося источника позволяет осуществить измерение энергии $\gamma$-квантов с огромной относительной точностью (до 15-й значащей цифры). Этим воспользовались Паунд и Ребка для измерения в земных условиях предсказанного обшей теорией относительности гравитационного красного смещения частоты фотонов (см. §7.5 кн. 1). Они расположили источник $\gamma$-излучения ($^{57}$Fe) и поглотитель в высокой башне на расстоянии 21 м друг от друга (рис. 6.9). Относительное изменение частоты $\gamma$-фотонов в этих условиях составляло всего $2 \cdot 10^{-15}$. Несмотря на крайнюю малость эффекта (сдвиг составлял около $10^{-2}$ ширины линии), Паунду и Ребке удалось обнаружить и измерить его с достаточной степенью точности. Полученный ими результат составил $0,99 \pm 0,05$ от предсказанного теорией. Таким образом, удалось убедительно доказать наличие гравитационного смещения частоты фотонов в условиях земной лаборатории.

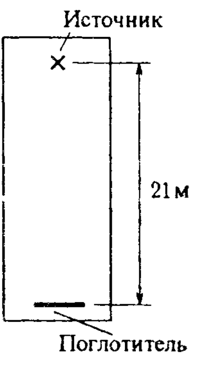


Рис. 6.9

Глава 7

# Статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака

## 7.1. Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

Одной из основных задач статистической физики является нахождение закона распределения частиц по разным квантовым состояниям.

Пусть имеется система практически не взаимодействующих частиц, каждая из которых может находиться в состояниях с энергиями $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, ... (Мы будем предполагать состояния невырожденными; это означает, что каждому значению энергии соответствует только одно состояние.) Если система находится в равновесном состоянии, то распределение частиц по энергиям характеризуется средними числами заполнения $\langle n_1 \rangle$, $\langle n_2 \rangle$, ..., т. е. средними числами частиц, находящихся в состояниях с соответствующими значениями энергии. Поскольку речь идет о средних числах, то они могут быть не только целыми, но и дробными.

В § 5.9 мы установили, что частицы подразделяются на два класса: фермионы (т. е. частицы с полуцелым спином) и бозоны (т. е. частицы с целым или нулевым спином). При больших числах заполнения закон распределения для фермионов и бозонов оказывается неодинаковым. В данном параграфе мы приведем вывод функций, описывающих эти распределения.

В гл. 2 кн. 3 мы рассмотрели полуклассическую статистическую физику в применении к молекулам газа. Для изображения состояний молекул мы ввели два пространства — пространство координат (т. е. обычное трехмерное пространство) с осями $x$, $y$, $z$ и пространство импульсов с осями $p_x$, $p_y$, $p_z$. Оба пространства мы разбили на одинаковые кубические ячейки. Состояние молекулы изображалось двумя точками — одной в ячейке пространства координат, другой в ячейке пространства

импульсов. Для того чтобы учесть принцип неопределенности, ячейки были взяты таких размеров, что произведение объема ячейки одного пространства на объем ячейки другого пространства было порядка $h^3$:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \sim h^3. \tag{7.1}$$

Теперь мы поступим несколько иначе. Введем воображаемое шестимерное пространство с взаимно перпендикулярными осями $x$, $y$, $z$, $p_x$, $p_y$, $p_z$. Его называют фазовым $\mu$-пространством. Разобьем это пространство на ячейки с объемом порядка $h^3$ (см. (7.1)). В этом случае состояние частицы определяется указанием ячейки $\mu$-пространства, в которую «попадает» данная частица. Задача заключается в том, чтобы найти наиболее вероятное распределение частиц по ячейкам $\mu$-пространства.

При размещении по ячейкам $\mu$-пространства фермионы и бозоны ведут себя существенно различным образом. В § 5.9 было отмечено, что фермионы подчиняются принципу Паули и, следовательно, могут находиться в различных состояниях (ячейках) только поодиночке. На бозоны принцип Паули не распространяется — они могут находиться в одном состоянии (в одной ячейке) в любом количестве. Для бозонов характерно, что вероятность $P$ возникновения («рождения») бозона в состоянии, в котором уже имеется $n$ частиц, пропорциональна $n : P \sim n$. Таким образом, бозоны «любят» накапливаться в одном состоянии.

Рассмотри идеальный ферми-газ, т. е. систему, состоящую из $N$ фермионов (например, электронов), заключенных в сосуд с неизменяющимся объемом. (Идеальность газа заключается в том, что взаимодействием между частицами можно пренебречь.) Найдем число $\Omega$ способов, которыми эти $N$ фермионов могут быть размещены по $Z$ ячейкам. (Очевидно, что должно выполняться условие $Z \geq N$; кстати, при $Z = N$ фермионы могут быть размещены по ячейкам только одним способом. Напомним, что частицы неразличимы.) Каждый способ размещения представляет собой микросостояние системы частиц. Следовательно, $\Omega$ есть не что иное, как статистический вес макросостояния системы (см. § 2.11 кн. 3). (В дальнейшем для краткости мы будем говорить просто «статвес».) Пометим ячейки, занятые частицами, черными кружками, а незанятые ячейки — светлыми кружками

(рис. 7.1). Произведем все возможные перестановки черных и светлых кружков. Число таких перестановок равно $Z!$. Однако вследствие неразличимости тождественных



Рис. 7.1

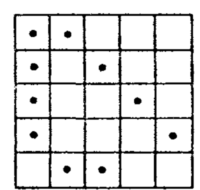
частиц перестановки черных кружков не приводят к новому распределению. Таких перестановок $N!$. Перестановки светлых кружков также ничего не изменяют. Таких перестановок $(Z-N)!$. Следовательно, число физически различимых распределений $N$ фермионов по $Z$ ячейкам равно

$$\Omega = \frac{Z!}{N!(Z-N)!}. \tag{7.2}$$

Если, например, $Z = 5$, а $N = 2$, то

$$\Omega = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10.$$

На рис. 7.2 показаны десять способов размещения двух частиц в пяти ячейках.



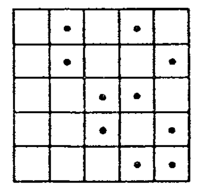


Рис. 7.2

Энергия $\varepsilon$ частицы зависит от ее координат (если есть внешнее поле) и компонент импульса:

$$\varepsilon = f(x, y, z, p_x, p_y, p_z).$$

В обычном трехмерном пространстве уравнение

$$f(x, y, z) = \text{const}$$

является уравнением некоторой поверхности. Например, уравнение $ax + by + cz = \text{const}$ есть уравнение плоскости, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ есть уравнение сферы.

Аналогично уравнение

$$f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \text{const} = \varepsilon$$

определяет гиперповерхность («сверхповерхность») в $\mu$-пространстве, все точки которой соответствуют одной и той же энергии частицы. Разобьем все $\mu$-пространство на тонкие энергетические слои. Будем считать $i$-м слой, ограниченный поверхностями $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varepsilon_i$ и $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varepsilon_{i+1}$. Тонким считается слой, для которого $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ll \varepsilon_i$.

Пусть в пределы $i$-го слоя попадает $Z_i$ ячеек и $N_i$ частиц. Тогда согласно (7.2) статвес подсистемы из $N_i$ частиц будет равен

$$\Omega_i = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}.$$

Статвес системы равен произведению статвесов подсистем:

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}. \qquad (7.3)$$

В статистической физике предполагается, что все микросостояния равновероятны. Поэтому статвес пропорционален вероятности данного макросостояния.

Чтобы найти наиболее вероятное распределение частиц по ячейкам, нужно найти максимум выражения (7.3) при соблюдении условий

$$\sum_i N_i = N \quad \text{и} \quad \sum_i \varepsilon_i N_i = E \qquad (7.4)$$

($E$ — энергия системы).

Вместо максимума статвеса $\Omega$ будем искать максимум энтропии $S = k \ln \Omega$ (см. формулу (2.96) кн. 3). С учетом (7.3)

$$S = k \sum_i [\ln Z_i! - \ln N_i! - \ln(Z_i - N_i)!]. \qquad (7.5)$$

Согласно формуле Стирлинга (см. Приложение 2 в кн. 3)

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

(это справедливо для $n \gg 1$, что соблюдается для чисел $Z_i$ и $N_i$). Преобразовав выражение (7.5) по формуле Стир-

линга, получим

$$S = k\sum_i [Z_i \ln Z_i - Z_i - N_i \ln N_i + \\ + N_i - (Z_i - N_i)\ln (Z_i - N_i) + (Z_i - N_i)] = \\ = -k\sum_i [N_i \ln N_i + (Z_i - N_i)\ln (Z_i - N_i)] + \text{const}, \quad (7.6)$$

где $\text{const} = \sum Z_i \ln Z_i$ (варьируются только числа $N_i$).

Надо найти максимум выражения (7.6) при условии постоянства полного числа частиц $N$ и энергии $E$ системы (см. (7.4)). Эта задача на условный экстремум решается методом множителей Лагранжа, суть которого заключается в следующем. Пусть требуется найти экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на аргументы которой наложены условия $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2$, ..., где $C_1$, $C_2$, ... — константы. В математике доказывается, что в этом случае надо приравнять нулю частные производные по всем переменным $x_i$ от функции

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots,$$

считая неопределенные множители Лагранжа $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... постоянными. Решив получившуюся систему $n$ уравнений, находим значения переменных $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, при которых достигается условный экстремум.

В соответствии с методом множителей Лагранжа образуем функцию

$$F = S + \alpha N - \beta E = -k\sum_i [N_i \ln N_i + \\ + (Z_i - N_i)\ln (Z_i - N_i)] + \text{const} + \\ + \alpha\sum_i N_i - \beta\sum_i \varepsilon_i N_i \quad (7.7)$$

($\alpha$ и $-\beta$ — множители Лагранжа) и приравняем частные производные этой функции по переменным $N_i$ нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = -k\left[\ln N_i + N_i\frac{1}{N_i} - \ln (Z_i - N_i) - \\ - (Z_i - N_i)\frac{1}{Z_i - N_i}\right] + \alpha - \beta\varepsilon_i = \\ = k\ln\frac{Z_i - N_i}{N_i} + \alpha - \beta\varepsilon_i = 0.$$

Из полученных уравнений следует, что

$$\frac{1 - N_i/Z_i}{N_i/Z_i} = \frac{Z_i - N_i}{N_i} = \exp\frac{\beta\varepsilon_i - \alpha}{k}. \tag{7.8}$$

Отношение $N_i/Z_i$ представляет собой среднее число частиц $\langle n_i \rangle$, приходящихся на одну ячейку, т. е. на одно квантовое состояние. Решив уравнение (7.8) относительно величин $\langle n_i \rangle = N_i/Z_i$, придем к формуле

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp[(\beta\varepsilon_i - \alpha)/k] + 1}. \tag{7.9}$$

Значение множителя $\beta$ можно найти, воспользовавшись тем, что равенство всех частных производных по $N_i$ функции (7.7) равнозначно равенству нулю дифференциала этой функции:

$$dF = dS - \beta\, dE = 0 \tag{7.10}$$

(число частиц $N$ остается постоянным, поэтому $dN = 0$). Предположим, что система получает обратимо количество теплоты $dQ$, в результате чего энтропия системы получает приращение $dS = dQ/T$. Поскольку объем системы остается постоянным, работы в ходе получения теплоты не совершается; следовательно, $dQ = dE$. Соответственно

$$dS = \frac{1}{T}\, dE. \tag{7.11}$$

Из соотношений (7.10) и (7.11) следует, что $\beta = 1/T$. Подставив в (7.9) найденное значение $\beta$ и представив множитель $\alpha$ в виде $\mu/T$, получим окончательное выражение для распределения Ферми–Дирака:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] + 1}. \tag{7.12}$$

Параметр распределения $\mu$ называется химическим потенциалом. Он является функцией макроскопических параметров состояния ферми-газа, в частности температуры. Энергия частицы определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Очевидно, что с точностью до той же постоянной определяется и химический потенциал $\mu$ (иначе от выбора этой постоянной, т. е. от нашего произвола, зависели бы числа заполнения). Обычно аддитивную постоянную выбирают так,

чтобы наименьшее значение энергии $\varepsilon_i$ было равно нулю. Тогда и химический потенциал делается однозначным.

При абсолютном нуле температуры величина $\mu$ может быть только положительной. В противном случае экспонента в знаменателе (7.12) обращалась бы при $T = 0$ в бесконечность, а числа заполнения — в нуль.

Перейдем к выводу закона распределения для идеального бозе-газа, т. е. системы практически не взаимодействующих бозонов. Вначале решим вспомогательную задачу. Возьмем $N$ неразличимых объектов, помещенных в некоторый длинный ящик (пенал). Разделим этот ящик с помощью $Z - 1$ перегородок на $Z$ ячеек (рис. 7.3) и найдем число способов, которыми объекты могут быть размещены по ячейкам, независимо от числа объектов в каждой ячейке.

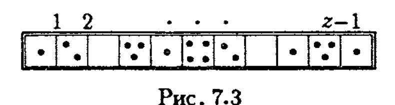



Рис. 7.3

Произведем все возможные перестановки $N + Z - 1$ элементов системы, состоящей из объектов и перегородок. (Подчеркнем, что переставляются не только частицы с частицами или перегородки с перегородками, но и частицы с перегородками.) Число таких перестановок равно $(N + Z - 1)!$. Однако вследствие неразличимости объектов их перестановки не приводят к новому распределению. Таких перестановок $N!$. Перестановки перегородок также ничего не изменяют. Таких перестановок $(Z - 1)!$. Следовательно, число способов, которыми $N$ неразличимых объектов могут быть распределены по $Z$ ячейкам, равно

$$\Omega = \frac{(N + Z - 1)!}{N!(Z - 1)!}. \tag{7.13}$$

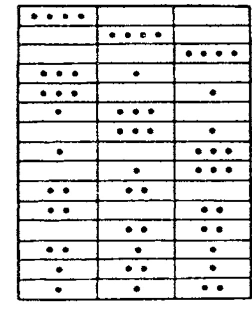


Рис. 7.4

На рис. 7.4 приведен пример, поясняющий формулу (7.13). При числе объектов $N = 4$ и ячеек $Z = 3$ имеется $(4 + 3 - 1)!/[4!(3 - 1)!] = 15$ способов размещения объектов по ячейкам.

Таким же будет число способов, которыми $N$ бозонов могут быть распределены по $Z$ состояниям. Разделим, как и при выводе распределения Ферми–Дирака, $\mu$-пространство на тонкие энергетические слои, в каждом из которых содержится $N_i$ частиц и $Z_i$ состояний. Тогда энтропия бозе-газа будет определяться выражением

$$S = k \ln \prod_i \frac{(N_i + Z_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!}.$$

Чтобы найти максимум энтропии при соблюдении условий (7.4), надо проделать выкладки, аналогичные тем, которые привели нас к формуле (7.8). В результате получится соотношение

$$\frac{N_i + Z_i - 1}{N_i} = \frac{\langle n_i \rangle + 1 - 1/Z_i}{\langle n_i \rangle} = \exp \frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}$$

(как и в случае фермионов $\beta = 1/T$, $\mu = \alpha T$). Числа $Z_i$ много больше единицы, поэтому слагаемым $-1/Z_i$ в числителе можно пренебречь. Разрешив получившееся в результате равенство относительно $\langle n_i \rangle$, получим для среднего числа бозонов в состоянии с энергией $\varepsilon_i$ формулу

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] - 1}, \tag{7.14}$$

которую называют **распределением Бозе–Эйнштейна**. Эта формула отличается от (7.12) только знаком перед единицей в знаменателе.

Химический потенциал $\mu$ бозе-газа не может быть положительным, потому что при $\mu > 0$ некоторые из чисел заполнения оказались бы отрицательными, что невозможно.

При малых (по сравнению с единицей) числах заполнения экспонента в знаменателе формул (7.12) и (7.14) много больше единицы. Поэтому единицей в знаменателе можно пренебречь, в результате чего оба распределения приобретают вид

$$\langle n_i \rangle = \exp[-(\varepsilon_i - \mu)/kT] = A \exp(-\varepsilon_i/kT), \tag{7.15}$$

где $A = \exp(\mu/kT)$. Таким образом, при малых числах заполнения распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна переходят в распределение Больцмана (см. формулу (2.82) кн. 3).

При выводе распределений (7.12) и (7.14) мы предполагали полное число частиц $N$ наперед заданным и неизменным. В случае, если число частиц непостоянно, условие $\sum N_i = N$ не имеет места. Поэтому в формуле, аналогичной (7.7), отсутствует слагаемое $\alpha \sum N_i$. Это означает, что $\alpha = 0$, соответственно и $\mu = 0$. Таким образом, химический потенциал бозе-газа с переменным числом частиц равен нулю, вследствие чего распределение (7.14) имеет вид

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\varepsilon_i/kT) - 1}. \tag{7.16}$$

## 7.2. Фотонный и фононный газы

**Фотонный газ.** При обычных (нелазерных) интенсивностях световые волны не возмущают друг друга. Это означает, что фотоны, которые можно сопоставить этим волнам, не взаимодействуют между собой. Поэтому излучение, находящееся в равновесии со стенками полости, в которой оно заключено, можно представить как идеальный фотонный газ.

Спин фотона равен единице. Следовательно, фотоны являются бозонами. Стенки полости непрерывно излучают и поглощают фотоны. Поэтому число фотонов не является наперед заданным (оно определяется объемом полости и температурой ее стенок). Из непостоянства числа фотонов вытекает, что их распределение по состояниям описывается формулой

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_i/kT) - 1} \tag{7.17}$$

(см. (7.16); мы сделали замену $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$). Исходя из этого попытаемся получить формулу Планка, т. е. вычислить энергию излучения, отнесенную к единице объема полости и к единичному интервалу частот (см. формулу (1.60)).

Энергия фотона не зависит от координат и направления его движения. В этом случае энергия частицы определяется только модулем ее импульса: $\varepsilon = f(p)$. Поэтому изоэнергетическая поверхность (т. е. поверхность, все точки которой соответствуют одинаковой энергии) представляет собой сферу радиуса $p$. Отсюда следует, что объем $\Delta\tau$ тонкого энергетического слоя равен объему шарового слоя радиуса $p$ и толщины $\Delta p$, умноженному на

объем сосуда, в котором находится газ:

$$\Delta\tau = V \cdot 4\pi p^2 \,\Delta p. \tag{7.18}$$

Поясним формулу (7.18) следующим примером. Пусть в обычном трехмерном пространстве имеется обычный газ, заключенный в сосуд с плоскими параллельными стенками, отстоящими друг от друга на расстояние $l$. Предположим, что потенциальная энергия молекул газа зависит только от расстояния $r$ от перпендикулярной к стенкам оси, которую мы обозначим буквой $\zeta$ (рис. 7.5). Тогда потенциальная энергия молекулы будет одинакова во всех точках цилиндрической поверхности радиуса $r$ и длины $l$. Уравнение изоэнергетической поверхности имеет вид $\xi^2 + \eta^2 = \text{const} = r^2$, а объем тонкого энергетического слоя

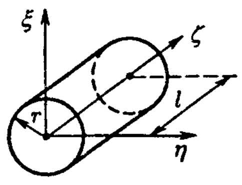


Рис. 7.5

$$\Delta\tau = l \cdot 2\pi r \,\Delta r.$$

От координаты $\zeta$ энергия не зависит. Поэтому в $\Delta\tau$ вошла множителем вся область изменения координаты $\zeta$ (напомним, что имеется в виду потенциальная энергия).

В рассмотренном нами примере $\zeta$ играет роль координат частицы $x$, $y$, $z$, а $\xi$ и $\eta$ — роль компонент импульса $p_x$, $p_y$, $p_z$. Поскольку в рассматриваемой нами задаче энергия частицы не зависит от координат $x$, $y$, $z$, в $\Delta\tau$ вошла множителем вся область изменения координат, т. е. объем $V$ (см. формулу (7.18)).

Найдем число состояний $Z_i$ фотона в $i$-м тонком энергетическом слое объема $\Delta\tau_i = V \cdot 4\pi p_i^2 \,\Delta p_i$. Объем ячейки в $\mu$-пространстве равен $h^3$. Поэтому число ячеек равно $\Delta\tau_i / h^3$. В каждой ячейке «помещается» два состояния фотона, различающихся направлением поляризации (см. текст перед формулой (1.50)). Следовательно,

$$Z_i = 2\frac{\Delta\tau_i}{h^3} = V \cdot 8\pi \frac{p_i^2 \,\Delta p_i}{8\pi^3\hbar^3} = V\frac{p_i^2 \,\Delta p_i}{\pi^2\hbar^3} \tag{7.19}$$

(мы учли, что $h = 2\pi\hbar$).

Импульс фотона $p = \hbar\omega/c$ (см. (2.9)). Соответственно $p^2 \,\Delta p = \hbar^3\omega^2 \,\Delta\omega/c^3$. Подстановка этого выражения в

(7.19) показывает, что

$$Z_i = V\frac{\omega_i^2\,\Delta\omega_i}{\pi^2 c^3}. \qquad (7.20)$$

Умножив $Z_i$ на среднее число заполнения $\langle n_i\rangle$, найдем число фотонов, частоты которых заключены в интервале $\Delta\omega_i$, а умножив это число на энергию фотона $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$, получим энергию фотонов

$$\Delta E_i = Z_i\langle n_i\rangle\hbar\omega_i.$$

Подстановка сюда выражений (7.17) и (7.20) приводит к формуле

$$\Delta E_i = V\frac{\hbar\omega_i^3\,\Delta\omega_i}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega_i/kT) - 1}. \qquad (7.21)$$

Наконец, разделив $\Delta E_i$ на $V$ и на $\Delta\omega_i$, найдем плотность энергии электромагнитного излучения, отнесенную к единичному интервалу частот, т. е. величину, которая в § 1.3 была обозначена через $u(\omega, T)$. Таким образом, опустив за ненадобностью индекс $i$, получим формулу

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1},$$

совпадающую с формулой Планка (1.60).

**Фононный газ.** В § 6.5 было показано, что колебания кристаллической решетки можно представить как фононный газ, заключенный в пределах образца кристалла, подобно тому как электромагнитное излучение можно представить как фотонный газ, заполняющий полость. Формально оба представления весьма схожи — и фотоны, и фононы подчиняются одной и той же статистике. Однако между фотонами и фононами имеется существенное различие: в то время как фотоны являются истинными частицами, фононы являются квазичастицами.

Применив к фононному газу распределение Бозе–Эйнштейна, можно получить выражение для энергии колебаний кристаллической решетки, а следовательно, и для теплоемкости кристаллов. Число фононов непостоянно (они могут возникать и исчезать). Поэтому надо взять распределение Бозе–Эйнштейна в виде (7.17).

Вычисление энергии кристалла, т. е. энергии фононного газа, аналогично приведенному в предыдущем параграфе вычислению энергии фотонного газа. В твердой

среде вдоль некоторого направления могут распространяться три разные волны с одним и тем же значением $\omega$, различающиеся направлением поляризации, одна продольная и две поперечные с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний. Поэтому в формуле (7.19) множитель 2 (учитывающий две взаимно перпендикулярные поляризации фотонов) нужно заменить множителем 3 (мы считаем скорость продольных и поперечных волн одинаковой). В результате число состояний в энергетическом слое толщины $\Delta p_i$ окажется равным

$$Z_i = 3\frac{\Delta\tau_i}{\hbar^3} = V\frac{3p_i^2\,\Delta p_i}{2\pi^2\hbar^3}.$$

Из (6.15) вытекает, что $p_i^2\,\Delta p_i = \hbar^3\omega_i^2\,\Delta\omega_i/v^3$. Следовательно,

$$Z_i = V\frac{3\omega_i^2\,\Delta\omega_i}{2\pi^2 v^3}. \qquad (7.22)$$

Умножив $Z_i$ на среднее число заполнения состояний $\langle n_i\rangle$ и на энергию фонона $\hbar\omega_i$, найдем ту часть энергии (за вычетом энергии нулевых колебаний), которая соответствует интервалу частот $\Delta\omega_i$:

$$\Delta E_i = Z_i\langle n_i\rangle\hbar\omega_i = V\frac{3\hbar\omega_i^3\,\Delta\omega_i}{2\pi^2 v^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega_i/kT)-1}. \qquad (7.23)$$

Полученное выражение отличается от (7.21) лишь тем, что в нем имеется множитель 3/2 и вместо скорости света стоит скорость упругих волн $v$.

Суммирование выражения (7.23) по индексу $i$ даст энергию кристалла (за вычетом нулевой энергии). Заменив суммирование интегрированием, представим выражение для энергии в виде

$$E = E_0 + V\frac{3\hbar}{2\pi^2 v^3}\int\limits_0^{\omega_m}\frac{\omega^3\,d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}. \qquad (7.24)$$

Здесь $\omega_m$ — наибольшая частота нормальных колебаний кристаллической решетки, равная $v\sqrt[3]{6\pi^2 n}$ (см. формулу (6.8)). Соответственно $\omega_m^3 = v^3\cdot 6\pi^2 n$. Заменив в множителе, стоящем в (7.24) перед интегралом, $v^3\pi^2$ на $\omega_m^3/6n$, придем к выражению, совпадающему с (6.10) (в формуле

(6.10) в отличие от (7.24) энергия кристаллической решетки обозначена буквой $U$). Наконец, продифференцировав выражение (7.24) по температуре $T$, придем к формуле (6.12) для теплоемкости.

## 7.3. Сверхтекучесть

Гелий является единственным веществом, которое остается жидким вплоть до абсолютного нуля температуры. (Твердая фаза может быть получена под давлением 25 атм и выше.) Имеются два изотопа (две разновидности атомов) гелия, которые различаются составом ядра. Ядро $^4$He состоит из четырех частиц — двух протонов и двух нейтронов; его спин равен нулю. Ядро $^3$He состоит из двух протонов и одного нейтрона; его спин равен 1/2. В дальнейшем мы рассматриваем только изотоп $^4$He. В состав атома гелия входят два электрона с «антипараллельными» спинами. Таким образом, атомы $^4$He имеют спин, равный нулю, и, следовательно, являются бозонами. (Атомы $^3$He являются фермионами.)

При атмосферном давлении гелий сжижается при 4,2 К. При понижении давления температура кипения гелия уменьшается. При 2,17 К гелий претерпевает фазовое превращение второго рода (т. е. превращение без поглощения или выделения теплоты и без изменения плотности жидкости). Жидкая фаза, существующая выше 2,17 К, называется гелием I (He I), фазу, существующую ниже 2,17 К, называют гелием II.

Гелий II обнаруживает своеобразные свойства, самым удивительным из которых является открытая в 1938 г. Капицей[1]) с в е р х т е к у ч е с т ь. Это явление заключается в том, что гелий II способен протекать по узким каналам или щелям, не обнаруживая никакой вязкости. Другой особенностью течения гелия II является образование пленки, покрывающей выступающие части предмета, частично погруженного в гелий II. Толщина этой пленки составляет примерно 100 атомных слоев. Наличие пленки приводит к тому, что пустая пробирка, опущенная в гелий II, начинает наполняться жидкостью даже в том случае, если ее верхний край расположен высоко над поверх-

---

[1]) Петр Леонидович Капица (1894–1984) — советский физик.

ностью жидкости в основном сосуде (рис. 7.6 *а*). Перетекание жидкости продолжается до тех пор, пока уровни жидкости в пробирке и в основном сосуде не сравняются. Если затем пробирку поднять (рис. 7.6 *б*), то жидкость вытекает из нее до тех пор, пока пробирка не опустеет. Таким образом, пленка работает как сифон.

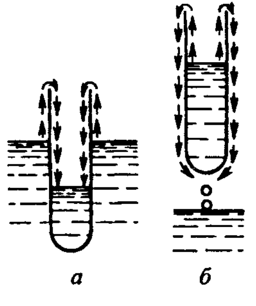


Рис. 7.6

Отсутствие вязкости гелия II при течении в капиллярах было продемонстрировано экспериментами с незатухающим потоком жидкости. В этих экспериментах использовался сосуд в виде тора, заполненный пористым материалом с очень тонкими каналами. Наполненный гелием II тор приводился во вращение вокруг его оси симметрии, а затем останавливался, после чего течение гелия II продолжалось без уменьшения скорости в течение 12 ч.

Таким образом, при течении через капилляры гелий II ведет себя как жидкость без трения. Вместе с тем, в экспериментах с погруженными в гелий II дисками, совершающими крутильные колебания, гелий II ведет себя как обычная вязкая жидкость, вызывающая затухание колебаний. Для объяснения такого противоречивого поведения гелия II была предложена двухжидкостная модель, согласно которой при отличных от нуля температурах гелий II ведет себя так, как если бы он представлял собой смесь двух жидкостей. Одна из них сверхтекуча и при движении вдоль твердой поверхности не обнаруживает вязкости. Другая же ведет себя как нормальная вязкая жидкость. Между этими движущимися «одна сквозь другую» частями жидкости нет трения. С понижением температуры относительная доля сверхтекучей компоненты возрастает. При абсолютном нуле вся жидкость сверхтекуча.

Представление о гелии II как «смеси» двух жидкостей — нормальной и сверхтекучей — не следует понимать буквально. Физически разделить эти две жидкости невозможно. Недопустимо также считать, что некоторые атомы принадлежат нормальной жидкости, а другие — сверхтекучей, поскольку все атомы гелия II одинаковы. Строго говоря, сущность двухжидкостной модели заключается в том, что в гелии II могут существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей эффективной массой. Одно из этих движений нормально, другое

сверхтекуче. Сумма эффективных масс этих движений равна массе жидкости. С учетом этой оговорки мы будем пользоваться моделью двух жидкостей.

Двухжидкостная модель разрешает парадокс, заключающийся в том, что в одних процессах гелий II ведет себя как сверхтекучая, а в других — как нормальная жидкость. В течении через капилляры и щели участвует в основном сверхтекучая компонента, нормальная же компонента задерживается. Затухание крутильных колебаний диска обусловливается нормальной компонентой жидкости.

Отметим, что отличительным свойством гелия II является также очень большая теплопроводность, которая в случае малых тепловых потоков стремится к бесконечности.

Теорию сверхтекучести создал Ландау[2]) в 1941 г. Эта теория очень сложна. Поэтому мы можем дать о ней только качественное представление.

Атомы $^4$He являются бозонами. Следовательно, они могут накапливаться в одном состоянии. Температура, ниже которой начинают проявляться квантовые свойства газа, обусловленные тождественностью его частиц, называется *температурой вырождения*. Применительно к бозонам температура вырождения представляет собой температуру, ниже которой происходит переход значительной доли частиц в состояние с нулевым импульсом (с наименьшей энергией).

Этот процесс называется *конденсацией Бозе-Эйнштейна*. При этом никакой конденсации в обычном смысле слова не происходит. Распределение частиц в пространстве остается равномерным. Речь идет лишь о конденсации в пространстве импульсов. Для подавляющего большинства газов температура вырождения очень мала и вещество переходит в твердое состояние гораздо раньше, чем может наступить конденсация Бозе-Эйнштейна. Исключение составляет гелий.

При абсолютном нуле все атомы гелия находятся в основном (невозбужденном) состоянии. При сообщении такой бозе-жидкости некоторой энергии возбуждаются не отдельные атомы жидкости, а возникают коллективные элементарные возбуждения. При температурах, близких к абсолютному нулю, элементарные возбуждения имеют такой же характер, как и элементарные возбуждения

---

[2]) Лев Давидович Ландау (1908-1968) — советский физик.

кристаллической решетки, т.е. являются фононами — квазичастицами с энергией

$$\varepsilon = \hbar\omega \qquad (7.25)$$

и импульсом

$$p = \varepsilon/v \qquad (7.26)$$

($v$ — скорость звука, экспериментально установленное значение которой равно 240 м/с). Из (7.26) следует, что $\varepsilon = vp$, т. е. что энергия зависит от импульса по линейному закону. Отметим, что в отличие от квазиимпульса фононов в кристалле импульс фононов в жидком гелии является истинным.

Число и энергия фононов резко растут с повышением температуры. При температуре около 0,6 К появляются возбуждения с бо́льшими энергиями. Эти возбуждения получили название ротонов. Для ротонов зависимость энергии от импульса является нелинейной.

Кривая зависимости энергии квазичастиц $\varepsilon$ от импульса $p$, т. е. график функции $\varepsilon(p)$, называется дисперсионной кривой или спектром возбуждений. Исходя из феноменологических соображений, Ландау предложил для гелия II дисперсионную кривую, изображенную на рис. 7.7. Вблизи начала координат зависимость $\varepsilon(p)$ имеет линейный характер — это область возбуждения фононов. Участок кривой вблизи $p_0$ соответствует ротонам. Кривая, предложенная Ландау, хорошо согласуется с экспериментальными данными по теплоемкости и другим термодинамическим свойствам гелия II. Она также была подтверждена экспериментами по рассеянию нейтронов жидким гелием. Ландау показал, что жидкость, элементарные возбуждения которой описываются кривой такого вида, как на рис. 7.7, обладает свойством сверхтекучести. Это означает, что трение о стенки капилляра или щели не может привести к замедлению потока жидкости и к переходу кинетической энергии потока в энергию возбуждения.

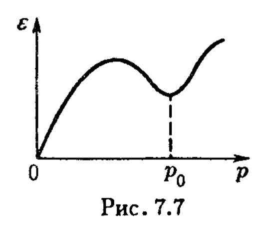


Рис. 7.7

Рассмотрим поток жидкости, в которой возбуждения (квазичастицы) отсутствуют. Пусть скорость потока относительно стенок капилляра равна V. Поскольку энергия и импульс квазичастиц определены в покоящейся среде, перейдем в систему отсчета, в которой жидкость в капилляре

неподвижна. В этой системе стенки капилляра движутся со скоростью $-\mathbf{V}$. Если масса капилляра равна $M$, то он обладает импульсом $\mathbf{P} = -M\mathbf{V}$ и кинетической энергией $E_к = \mathbf{P}^2/2M$. Пусть в результате трения о стенку в жидкости возникло возбуждение с энергией $\varepsilon$ и импульсом $\mathbf{p}$. Тогда вследствие законов сохранения кинетическая энергия капилляра должна получить приращение

$$\Delta E_к = -\varepsilon, \tag{7.27}$$

а импульс — приращение

$$\Delta \mathbf{P} = -\mathbf{p}. \tag{7.28}$$

Приращение кинетической энергии капилляра

$$\Delta E_к = \Delta(\mathbf{P}^2/2M) = 2\mathbf{P}\,\Delta\mathbf{P}/2M = \mathbf{V}\,\Delta\mathbf{P}.$$

Подставив значения (7.27) и (7.28) для $\Delta E_к$ и $\Delta\mathbf{P}$, получим $\varepsilon = \mathbf{V}\mathbf{p}$. Поскольку $\mathbf{V}\mathbf{p} \le Vp$, имеет место соотношение $\varepsilon \le Vp$, откуда

$$V \ge \varepsilon/p. \tag{7.29}$$

Полученный результат означает, что при скоростях течения $V$, меньших минимального возможного значения $\varepsilon/p$, обмен энергией и импульсом между капилляром и жидкостью невозможен — он противоречит законам сохранения.

Найдем минимальное значение отношения $\varepsilon/p$. Условие минимума имеет вид

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \frac{1}{p}\frac{d\varepsilon}{dp} - \frac{\varepsilon}{p^2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{\varepsilon}{p}. \tag{7.30}$$

Точка на кривой дисперсии (рис. 7.8), в которой выполняется условие (7.30), определяет минимальное значение $V_{\min}$ скорости течения, при котором возможно возбуждение жидкости, текущей по капилляру. В этой точке касательная к кривой проходит через начало координат. Угол наклона касательной отличен от нуля, следовательно, отлична от нуля и $V_{\min}$.

В наших рассуждениях мы предполагали, что температура жидкости равна нулю, вследствие чего возбуждения в ней отсутствуют. Если температура отлична от абсолютного нуля, но не превышает 2,17 К, то в жидкости, независимо от ее движения, имеются слабые возбуждения. В этом случае взаимодействие текущей жидкости со стенками капилляра может привести к появлению дополнительных возбуждений. Если скорость течения $V$ меньше минимального значения отношения $\varepsilon/p$, появление дополнительных возбуждений невозможно. Следовательно, стенки капилляра не оказывают воздействия на текущую жидкость — имеет место сверхтекучесть.

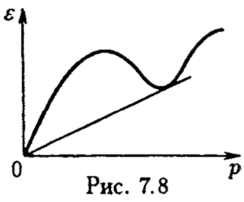


Рис. 7.8

В заключение отметим, что явление сверхтекучести примечательно тем, что в нем проявляется квантование в макроскопических масштабах.

# Глава 8

# Электропроводность металлов и полупроводников

## 8.1. Квантовая теория свободных электронов в металле. Электронный газ

В § 11.3 кн. 2 была изложена элементарная классическая теория свободных электронов в металле. Теперь познакомимся с основами квантовой теории.

Согласно модели свободных электронов валентные электроны атомов металла могут свободно перемещаться в пределах образца. Именно валентные электроны обусловливают электропроводность металла, и по этой причине их называют электронами проводимости.

Допустим, что электроны проводимости движутся в пределах образца металла совершенно свободно. Положив в формуле (4.12) $U = 0$, получим уравнение Шрёдингера для свободного электрона:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \varepsilon\psi \tag{8.1}$$

($m$ — масса, $\varepsilon$ — энергия электрона).

Легко проверить подстановкой, что решение уравнения (8.1) имеет вид

$$\psi = C\exp(i\mathbf{kr}), \tag{8.2}$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ есть волновой вектор электрона, связанный с энергией соотношением

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}. \tag{8.3}$$

Пусть число свободных электронов в единице объема металла равно $n$. Тогда в образце металла будет содержаться $nV$ свободных электронов. Вследствие принципа Паули при абсолютном нуле эти электроны расположатся по одному в каждом состоянии на самых низких энергетических уровнях. Поэтому все состояния с энергией

$\varepsilon$, меньшей некоторого значения $\varepsilon_F(0)$, будут заполнены электронами, состояния же с $\varepsilon > \varepsilon_F(0)$ будут вакантными. Энергия $\varepsilon_F(0)$ называется *уровнем Ферми при абсолютном нуле*. В следующем параграфе будет показано, что уровень Ферми играет роль параметра $\varepsilon_F$ в распределении электронов по состояниям с различной энергией. Этот параметр слабо зависит от температуры. Величина $\varepsilon_F(0)$ представляет собой значение параметра $\varepsilon_F$ при $T = 0$ К.

Изоэнергетическая поверхность[1]) в $k$-пространстве (или, что то же самое, в $p$-пространстве; $p = \hbar k$), соответствующая значению энергии, равному $\varepsilon_F$, носит название *поверхности Ферми*. В случае свободных электронов эта поверхность описывается уравнением

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \varepsilon_F$$

(см. (8.3)) и, следовательно, имеет форму сферы. При абсолютном нуле температуры поверхность Ферми отделяет состояния, заполненные электронами, от незаполненных состояний.

**Электронный газ в металлах.** Свободные электроны в металлах ведут себя подобно молекулам идеального газа. Поэтому их называют *электронным газом*.

В § 4.6 мы выяснили, что энергия частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме, квантуется. Аналогичный результат получается и для свободных электронов в металле. Металлический образец представляет собой для электронов трехмерную потенциальную яму. Решение уравнения Шрёдингера для частицы, находящейся в такой яме, показывает, что энергия частицы может иметь только дискретные (квантованные) значения.

Электроны являются фермионами (их спин равен 1/2); поэтому распределение электронов по энергетическим уровням описывается функцией Ферми–Дирака. При выводе формулы (7.12) мы считали уровни энергии невырожденными, т. е. не учитывали возможности того, что данной энергии могут соответствовать несколько различных квантовых состояний частицы. Электроны обладают одной и той же энергией в двух состояниях, различающихся ориентацией спина (т. е. значениями квантового

[1]) То есть поверхность постоянной энергии.

числа $m_s$, которое может быть равно $\pm 1/2$). В связи с этим среднее число электронов, находящихся на уровне энергии $\varepsilon_i$, определяется выражением

$$\langle n_i \rangle = \frac{2}{\exp[(\varepsilon_i - \varepsilon_F)/kT] + 1}. \tag{8.4}$$

Имеющий размерность энергии параметр $\mu$ в формуле (7.12) часто обозначают через $\varepsilon_F$ и называют **уровнем Ферми** или **энергией Ферми**. В формуле (8.4) мы воспользовались этим обозначением. Отметим, что $\varepsilon_F > 0$, иначе некоторые числа заполнения оказались бы при $T = 0$ К отрицательными.

При абсолютном нуле электроны располагаются попарно на самых низких доступных для них уровнях. В соответствии с этим зависимость $\langle n_i \rangle$ от $\varepsilon_i$ имеет вид, показанный на рис. 8.1. (Вследствие дискретности уровней горизонтальный участок графика состоит из отдельных точек. Однако уровни расположены столь густо, что изображающие их точки сливаются в непрерывную линию.) Тот же результат вытекает и из формулы (8.4). При $T = 0$ К

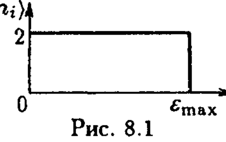


Рис. 8.1

$$\langle n_i \rangle = 2, \quad \text{если} \quad \varepsilon_i < \varepsilon_F,$$
$$\langle n_i \rangle = 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon_i > \varepsilon_F.$$

Таким образом, при абсолютном нуле уровень Ферми $\varepsilon_F$ совпадает с верхним заполненным электронами уровнем $\varepsilon_{max}$. Независимо от значения температуры, при $\varepsilon_i = \varepsilon_F$ среднее число заполнения $\langle n_i \rangle$ равно единице.

Найдем выражение для уровня Ферми. Каждой ячейке $\mu$-пространства соответствуют два состояния электрона, различающиеся направлением спина. Поэтому, как и в случае фотонов, число состояний в тонком энергетическом слое объема $\Delta\tau_i$ определяется формулой (см. (7.19))

$$Z_i = 2\frac{\Delta\tau_i}{h^3} = V\frac{p_i^2\,\Delta p_i}{\pi^2\hbar^3}. \tag{8.5}$$

Импульс электрона связан с его энергией соотношением $\varepsilon_i = p_i^2/2m$. Отсюда $p_i = (2m\varepsilon_i)^{1/2}$, а $p_i\,\Delta p_i = m\,\Delta\varepsilon_i$. Перемножив эти выражения, найдем, что

$$p_i^2\,\Delta p_i = m(2m\varepsilon_i)^{1/2}\,\Delta\varepsilon_i.$$

Произведя в (8.5) такую замену, получим

$$Z_i = V\frac{m(2m\varepsilon_i)^{1/2}\,\Delta\varepsilon_i}{\pi^2\hbar^3} = V\frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\varepsilon_i^{1/2}\,\Delta\varepsilon_i. \qquad (8.6)$$

Введя обозначение

$$A = V\frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}, \qquad (8.7)$$

представим формулу (8.6) в виде

$$Z_i = A\varepsilon_i^{1/2}\,\Delta\varepsilon_i. \qquad (8.8)$$

При абсолютном нуле заполнены $N$ нижних состояний, где $N$ — число электронов в данном образце металла. Следовательно, сумма чисел $Z_i$, соответствующих энергиям от 0 до $\varepsilon_{\max}$, должна быть равна $N$:

$$N = \sum Z_i = A\sum_0^{\varepsilon_F}\varepsilon_i^{1/2}\,\Delta\varepsilon_i \qquad (8.9)$$

(мы учли, что при абсолютном нуле $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_F$). Приняв во внимание, что $\Delta\varepsilon_i \ll \varepsilon_i$, можно в формуле (8.9) заменить суммирование интегрированием. Тогда

$$N = A\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon = \frac{2}{3}A\varepsilon_F^{3/2}. \qquad (8.10)$$

Подстановка выражения (8.7) для $A$ дает

$$N = \frac{2}{3}V\frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\varepsilon_F^{3/2}.$$

Отсюда с учетом того, что $N/V = n$ есть концентрация свободных электронов, т. е. их число в единице объема металла, получается для уровня Ферми при абсолютном нуле формула

$$\varepsilon_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}. \qquad (8.11)$$

Оценим значение $\varepsilon_F(0)$. Концентрация свободных электронов в металлах лежит в пределах от $10^{28}$ до $10^{29}$ м$^{-3}$. Взяв для $n$ среднее значение $5\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$, получим

$$\varepsilon_F(0) = \frac{(1,05\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot 0,91\cdot 10^{-30}}\cdot(3\cdot 3,14^2\cdot 5\cdot 10^{28})^{2/3} = \\ = 8\cdot 10^{-19}\,\text{Дж} = 5\,\text{эВ} \qquad (8.12)$$

Величина

$$T_F = \varepsilon_F(0)/k \qquad (8.13)$$

называется температурой Ферми. Для $\varepsilon_F(0) = 5$ эВ температура Ферми равна примерно 60 000 К, т. е. в 200 раз превышает комнатную температуру.

Теперь можно найти среднюю энергию электронов при абсолютном нуле. Для этого нужно умножить число состояний $Z_i$ на энергию $\varepsilon_i$ и просуммировать произведения по соответствующим значениям индекса $i$. В результате получится суммарная энергия $E$ свободных электронов, заключенных в объеме $V$:

$$E = \sum Z_i\varepsilon_i = A\sum_0^{\varepsilon_F} \varepsilon_i^{3/2}\,\Delta\varepsilon_i.$$

Замена суммирования интегрированием дает

$$E = A\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon = \frac{2}{5}A\varepsilon_F^{5/2}. \qquad (8.14)$$

Разделив суммарную энергию $E$ на число электронов $N$, т. е. взяв отношение выражений (8.14) и (8.10), найдем среднюю энергию свободных электронов при абсолютном нуле:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{5}\varepsilon_F(0). \qquad (8.15)$$

С учетом (8.12) для средней энергии свободных электронов при абсолютном нуле получается примерно 3 эВ. Это огромная величина. Чтобы сообщить классическому электронному газу такую энергию, его нужно нагреть до температуры порядка 25 000 К.

Уровень Ферми, хотя и очень слабо, но зависит от температуры. Для температур, удовлетворяющих условию $kT \ll \varepsilon_F$, эта зависимость описывается приближенной формулой

$$\varepsilon_F \approx \varepsilon_F(0)\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F(0)}\right)^2\right]. \qquad (8.16)$$

Для комнатных температур $kT \approx 0,025$ эВ, в то время как $\varepsilon_F(0) \approx 5$ эВ. Следовательно, при температуре порядка 300 К $\varepsilon_F$ отличается от $\varepsilon_F(0)$ лишь на 0,002 %. Поэтому во многих случаях можно полагать $\varepsilon_F$ равным $\varepsilon_F(0)$. Однако

для понимания некоторых явлений зависимость $\varepsilon_F$ от $T$ имеет принципиальное значение.

При температурах, отличных от нуля, график функции (8.4) имеет вид, показанный на рис. 8.2. Заметное отличие от графика, изображенного на рис. 8.1, наблюдается лишь в области порядка $kT$. Чем выше температура, тем более полого идет ниспадающий участок кривой.



Рис. 8.2

Поведение электронного газа в сильной степени зависит от соотношения между температурой кристалла и температурой Ферми (см. (8.13)).

Различают два предельных случая.

1. Если $T \ll T_F$, т. е. $kT \ll \varepsilon_F$, электронный газ называется вырожденным.

2. Если $T \gg T_F$, т. е. $kT \gg \varepsilon_F$, электронный газ называется невырожденным.

Температура Ферми для металлов составляет несколько десятков тысяч кельвин. Поэтому даже при температуре, близкой к температуре плавления металла (порядка $10^3$ K), электронный газ в металле является вырожденным. В полупроводниках концентрация свободных электронов оказывается много меньшей, чем в металлах. Соответственно уровень Ферми мал (согласно (8.11) $\varepsilon_F$ пропорционально $n^{2/3}$). Поэтому уже при комнатной температуре электронный газ во многих полупроводниках является невырожденным и подчиняется классической статистике.

Теперь можно объяснить, почему электронный газ вносит очень малый вклад в теплоемкость металлов. Средняя энергия теплового движения, равная по порядку величины $kT$, составляет при комнатной температуре (1/40) эВ. Такая энергия может возбудить только электроны, находящиеся на самых верхних уровнях, примыкающих к уровню Ферми. Основная масса электронов, размещенных на более глубоких уровнях, останется в прежних состояниях и поглощать энергию при нагревании не будет. Таким образом, в процессе нагревания металла участвует лишь незначительная часть электронов проводимости, чем и объясняется малая теплоемкость электронного газа в металлах.

Из рис. 8.2 следует, что доле электронов, переходящих при нагревании на более высокие уровни, можно сопоставить интервал энергии порядка $kT$. Доле же электронов,

остающихся на прежних уровнях, можно сопоставить интервал порядка $\varepsilon_F$. Следовательно, относительная доля электронов, обусловливающих теплоемкость, приблизительно равна

$$kT/\varepsilon_F = T/T_F,$$

где $T_F$ — температура Ферми (см. (8.13)). В результате теплоемкость электронов составит

$$C_{\text{эл}} \approx C_{\text{кл}} T/T_F.$$

При комнатной температуре $C_{\text{эл}}$ примерно в 100 раз меньше классического значения ($T \approx 300$ К, $T_F \approx 30\,000$ К).

## 8.2. Энергетические зоны в кристаллах

В § 7.4 мы установили, что в приближении свободных электронов энергия валентных электронов в кристалле изменяется квазинепрерывно. Это означает, что спектр разрешенных значений энергии состоит из множества близкорасположенных дискретных уровней. В действительности валентные электроны в кристалле движутся не вполне свободно — на них действует периодическое поле решетки. Это обстоятельство приводит к тому, что спектр возможных значений энергии валентных электронов распадается на ряд чередующихся разрешенных и запрещенных зон (рис. 8.3). В пределах разрешенных зон энергия изменяется квазинепрерывно. Значения энергии, принадлежащие запрещенным зонам, не могут реализоваться.

Чтобы понять происхождение зон, рассмотрим воображаемый процесс объединения атомов в кристалл. Пусть первоначально имеется $N$ изолированных атомов какого-либо вещества. Пока атомы изолированы друг от друга, они имеют полностью совпадающие схемы энергетических уровней. Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. Вместо одного одинакового для всех $N$ атомов уровня возникают $N$ очень близких, но не совпадающих уровней. Таким образом, каждый уровень изолированного атома расщепляется в кристалле на $N$ густо расположенных уровней, образующих полосу или зону.

Величина расщепления для разных уровней не одинакова. Сильнее возмущаются уровни, заполненные в атоме внешними электронами. Уровни, заполненные внутрен-

ними электронами, возмущаются мало. На рис. 8.4 показано расщепление уровней как функция расстояния $r$ между атомами. Из схемы видно, что возникающее в

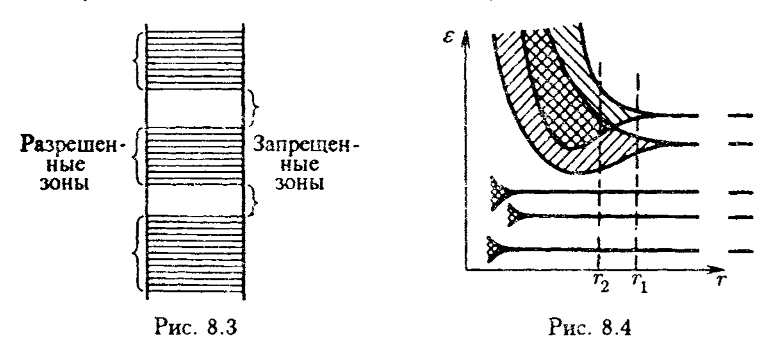



Рис. 8.3 Рис. 8.4

кристалле расщепление уровней, занятых внутренними электронами, очень мало. Заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Такому же расщеплению подвергаются и более высокие уровни, не занятые электронами в основном состоянии атома.

В зависимости от конкретных свойств атомов равновесное расстояние между соседними атомами в кристалле может быть либо типа $r_1$, либо типа $r_2$ (см. рис. 8.4). При расстоянии типа $r_1$ между разрешенными зонами, возникшими из соседних уровней атома, имеется запрещенная зона. При расстоянии типа $r_2$ происходит перекрывание соседних зон. Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме количеств уровней, на которые расщепляются оба уровня атома.

Зонная структура энергетических уровней получается непосредственно из решения уравнения Шрёдингера для электрона, движущегося в периодическом силовом поле. Это поле создается решеткой кристалла. Уравнение Шрёдингера, учитывающее поле решетки, имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = E\psi,$$

где $U$ — функция, обладающая свойствами:

$$U(x+a,\, y,\, z) = U(x,\, y,\, z),$$
$$U(x,\, y+b,\, z) = U(x,\, y,\, z),$$
$$U(x,\, y,\, z+c) = U(x,\, y,\, z)$$

($a$, $b$, $c$ — периоды решетки вдоль осей $x$, $y$, $z$).

Блох доказал, что решение уравнения Шрёдингера с периодическим потенциалом имеет вид

$$\psi_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{kr}), \tag{8.17}$$

где $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — функция, имеющая периодичность потенциала, т. е. периодичность решетки. Решения (8.17) называются функциями Блоха. Они отличаются от (8.2) наличием периодического множителя $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$.

В § 7.3 мы уже отмечали, что график зависимости энергии частицы $\varepsilon$ от модуля волнового вектора $\mathbf{k}$, т. е. график функции $\varepsilon(k)$ [2]), называется дисперсионной кривой. В приближении свободных электронов дисперсионная кривая имеет вид, показанный на рис. 8.5 (см. формулу

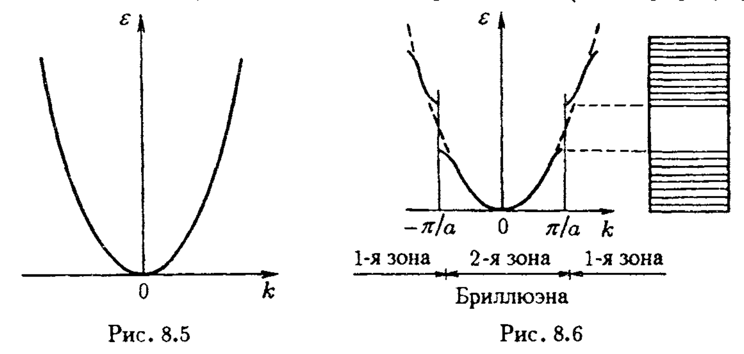



Рис. 8.5 Рис. 8.6

(8.3)). Значения энергии образуют квазинепрерывную последовательность. Следовательно, график $\varepsilon(k)$ состоит из дискретных точек. Однако эти точки расположены так густо, что зрительно сливаются в сплошную кривую.

В случае периодического поля дисперсионная кривая имеет вид, показанный на рис. 8.6. Из рисунка видно, что изображенные сплошными линиями зоны квазинепрерывно изменяющейся энергии (разрешенные зоны) чередуются с запрещенными зонами. Каждая разрешенная зона состоит из близкорасположенных дискретных уровней, число которых равно числу атомов в образце кристалла.

Область $k$-пространства, внутри которой энергия электрона в кристалле изменяется квазинепрерывно, называется зоной Бриллюэна. На границах зон энергия

[2]) Или, что то же самое, график зависимости $\varepsilon$ от модуля импульса $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$). См. рис. 7.7 и относящийся к нему текст.

терпит разрыв. Рисунок 8.6 изображает зоны Бриллюэна в случае одномерного кристалла. Для трехмерных кристаллов границами зон Бриллюэна являются замкнутые многогранные поверхности, заключенные одна внутри другой.

Напомним, что поверхностью Ферми называется изоэнергетическая поверхность в $k$-пространстве (или в $p$-пространстве), соответствующая значению $\varepsilon$, равному $\varepsilon_F$ (см. § 7.4). В случае свободных электронов эта поверхность имеет форму сферы. Форма поверхности для электронов проводимости металла зависит от свойств кристаллической решетки и имеет сложный, подчас причудливый вид. Для ряда металлов форма поверхности Ферми установлена экспериментально с большой точностью.

Поверхность Ферми является важной характеристикой металла. Форма этой поверхности определяет характер движения электронов с энергией, близкой к $\varepsilon_F$. Характер же движения электронов, в свою очередь, определяет физику различных явлений, наблюдаемых при воздействии на металл магнитного поля.

Итак, спектр возможных значений энергии валентных электронов в кристалле распадается на ряд разрешенных и запрещенных зон. Ширина зон не зависит от размеров кристалла. Таким образом, чем больше атомов содержит кристалл, тем теснее располагаются уровни в зоне. Ширина разрешенных зон имеет величину порядка нескольких электронвольт. Следовательно, если кристалл содержит $10^{23}$ атомов, расстояние между соседними уровнями в зоне составляет $\sim 10^{-23}$ эВ.

Каждый энергетический уровень отвечает определенному значению $\mathbf{k}$. Поскольку квантовое число $m_s$ может принимать два значения, на любом разрешенном уровне могут находиться два электрона, обладающие противоположными спинами.

Существование энергетических зон позволяет объяснить с единой точки зрения существование металлов, полупроводников и диэлектриков.

Разрешенную зону, возникшую из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома, мы будем называть **валентной зоной**. При абсолютном нуле валентные электроны заполняют попарно нижние уровни валентной зоны. Более высокие разрешенные зоны будут от электронов свободны. В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны возможны три случая,

изображенные на рис. 8.7. В случае *а* электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ($10^{-23}$ - $10^{-22}$ эВ), для того чтобы перевести их на более высокие уровни. Энергия

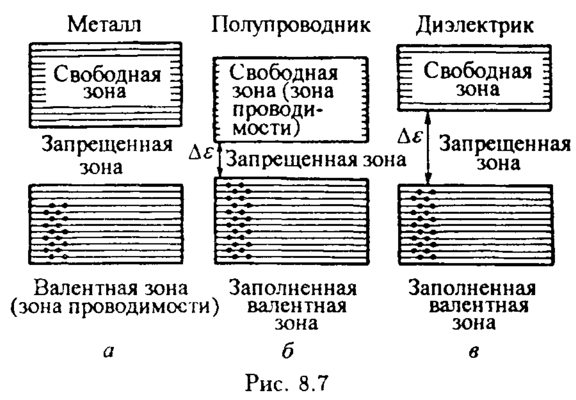


Рис. 8.7

теплового движения ($kT$) составляет при 1 К величину порядка $10^{-4}$ эВ. Следовательно, при температурах, отличных от абсолютного нуля, часть электронов переводится на более высокие уровни. Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться электрическим полем и приобретать дополнительную скорость в направлении, противоположном направлению поля. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собою металл.

Частичное заполнение валентной зоны (в случае металла ее называют также **зоной проводимости**) наблюдается в тех случаях, когда на последнем занятом уровне в атоме находится только один электрон или когда имеет место перекрывание зон (см. рис. 8.4, расстояние $r_2$). В первом случае $N$ электронов проводимости заполняют попарно только половину уровней валентной зоны. Во втором случае число уровней в зоне проводимости будет больше $N$, так что, даже если число электронов проводимости равно $2N$, они не смогут занять все уровни зоны.

В случаях *б* и *в* (см. рис. 8.7) уровни валентной зоны полностью заняты электронами — зона заполнена. Для того чтобы увеличить энергию электрона, необходимо со-

общить ему количество энергии, не меньшее, чем ширина запрещенной зоны $\Delta\varepsilon$. Электрическое поле (во всяком случае такой напряженности, при которой не происходит электрический пробой кристалла) сообщить электрону такую энергию не в состоянии. При этих условиях электрические свойства кристалла определяются шириной запрещенной зоны $\Delta\varepsilon$. Если эта ширина невелика (порядка нескольких десятых электронвольта), энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в верхнюю свободную зону. Эти электроны будут находиться в условиях, аналогичных тем, в которых находятся валентные электроны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Одновременно станет возможным переход электронов валентной зоны на ее освободившиеся верхние уровни. Такое вещество называется *собственным полупроводником*.

Если ширина запрещенной зоны $\Delta\varepsilon$ велика (порядка нескольких электронвольт), тепловое движение не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае кристалл оказывается диэлектриком.

## 8.3. Динамика электронов в кристаллической решетке

Волновое число $k$ связано с импульсом электрона $p$ равенством $p = \hbar k$. Заменив в соотношении неопределенностей $\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar$ импульс через волновое число, получим соотношение неопределенностей для $k$ и $x$:

$$\Delta k \cdot \Delta x \sim 1. \tag{8.18}$$

Из этого соотношения следует, что при точно определенном $k$ положение электрона в кристалле будет совершенно неопределенным. Для того чтобы можно было изучать динамику электрона в кристалле, необходимо располагать выражениями для его скорости и ускорения. О скорости же можно говорить лишь в том случае, если электрон будет хотя бы приближенно локализован в пространстве.

Положим $\Delta k$ отличным от нуля. Тогда электрон будет локализован в пределах области $\Delta x \sim 1/\Delta k$. Согласно принципу суперпозиции (см. § 4.8) пси-функция электрона может быть представлена в виде суммы плоских волн вида $\exp(i\mathbf{kr})$, значения волновых чисел которых заключены в пределах $\Delta k$. Если $\Delta k$ невелико, суперпозиция плоских волн образует *волновой пакет*. Максимум амплитуды

результирующей волны перемещается с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \tag{8.19}$$

(см. формулу (7.15) кн. 4). Наиболее вероятное местонахождение электрона совпадает с центром группы волн. Следовательно, $v_{\text{гр}}$ представляет собой скорость электрона в кристалле.

Воспользовавшись соотношением $\varepsilon = \hbar\omega$, заменим в (8.19) частоту через энергию. В результате получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\hbar}\frac{d\varepsilon}{dk}. \tag{8.20}$$

Выясним, как будет себя вести электрон под действием наложенного на кристалл внешнего электрического поля $E$. В этом случае, кроме сил $F_{\text{крист}}$, создаваемых полем решетки, на электрон будет действовать сила $F$, модуль которой равен $eE$. За время $dt$ эта сила совершает над электроном работу $dA = Fv_{\text{гр}}dt$. Подстановка выражения (8.20) для $v_{\text{гр}}$ дает

$$dA = \frac{F}{\hbar}\frac{d\varepsilon}{dk}\,dt. \tag{8.21}$$

Эта работа идет на приращение энергии электрона в кристалле: $dA = d\varepsilon$. Заменив в (8.21) $dA$ на $d\varepsilon$ и приняв во внимание, что $d\varepsilon = (d\varepsilon/dk)dk$, придем к соотношению

$$\frac{d\varepsilon}{dk}dk = \frac{F}{\hbar}\frac{d\varepsilon}{dk}dt.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar}. \tag{8.22}$$

Продифференцировав выражение (8.20) по $t$, найдем ускорение электрона в кристалле:

$$\frac{dv_{\text{гр}}}{dt} = \frac{1}{\hbar}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon}{dk}\right) = \frac{1}{\hbar}\frac{d^2\varepsilon}{dk^2}\frac{dk}{dt}.$$

Приняв во внимание (8.22), получим

$$\frac{dv_{\text{гр}}}{dt} = \frac{1}{\hbar}\frac{d^2\varepsilon}{dk^2}\frac{F}{\hbar}.$$

Напишем эту формулу следующим образом:

$$\left(\frac{\hbar^2}{d^2\varepsilon/dk^2}\right)\frac{dv_{\text{гр}}}{dt} = F. \tag{8.23}$$

Из (8.23) вытекает, что ускорение электрона в кристалле пропорционально внешней силе $eE$. Этот результат является нетривиальным, поскольку ускорение должно быть пропорциональным сумме сил $eE$ и $F_{\text{крист}}$, и только лишь своеобразие силы $F_{\text{крист}}$ приводит к тому, что при пропорциональности ускорения сумме сил $eE$ и $F_{\text{крист}}$ имеет место также его пропорциональность слагаемому $eE$. Сопоставляя (8.23) с уравнением второго закона Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

приходим к выводу, что выражение

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2\varepsilon/dk^2} \tag{8.24}$$

формально играет по отношению к внешней силе $F = eE$ роль массы, в связи с чем величину (8.24) называют эффективной массой электрона в кристалле.

Эффективная масса $m^*$ может сильно отличаться от фактической массы электрона $m$, в частности она может принимать отрицательные значения. Это обусловлено тем обстоятельством, что в действительности уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{крист}}, \tag{8.25}$$

где $\mathbf{F}_{\text{крист}}$ — сила, обусловленная действием на электрон поля решетки. Сопоставление (8.25) с уравнением

$$m^*\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

наглядно показывает, что $m^*$ может существенно отличаться от $m$. Несмотря на это, именно значение $m^*$ определяет характер движения электрона в решетке под действием силы $eE$. Введение эффективной массы позволяет, абстрагируясь от взаимодействия электронов с решеткой, определять характер движения электрона под действием внешнего поля. Приписав электрону массу $m^*$, мы можем

исследовать поведение электрона под действием силы $eE$, считая его свободным. Из сказанного вытекает, что соотношения, полученные в приближении свободных электронов, оказываются справедливыми для электрона, движущегося в периодическом поле, если в них заменить истинную массу $m$ эффективной массой $m^*$.

В частности, выражение (8.3) в случае периодического поля имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2. \tag{8.26}$$

Действительно, двукратное дифференцирование по $k$ дает

$$\frac{d^2\varepsilon}{dk^2} = \frac{\hbar^2}{m^*},$$

что согласуется с определением $m^*$ (см. формулу (8.24)).

Итак, воздействие решетки на движение электрона можно учесть, заменив в уравнении движения, включающем только внешнюю силу $eE$, истинную массу $m$ эффективной массой $m^*$.

Исследуем зависимость эффективной массы $m^*$ от «местоположения» электрона внутри разрешенной энергетической зоны. Вблизи дна зоны (см. точки $A$ и $A'$ на рис. 8.8) ход кривой $\varepsilon(k)$ мало отличается от хода кривой для свободных электронов (см. рис. 8.5). Соответственно $m^* \approx m$. В точке перегиба (точка $B$ на рис. 8.8) $d^2\varepsilon/dk^2$ равно нулю. Следовательно, $m^*$ обращается в бесконечность. Это означает, что внешнее поле не может изменить скорость электрона, находящегося в состоянии с энергией $\varepsilon_B$. Вблизи потолка разрешенной зоны (точка $C$ на рис. 8.8) производная $d^2\varepsilon/dk^2 < 0$ ($d\varepsilon/dk$ с ростом $k$ уменьшается). В соответствии с этим эффективная масса $m^*$ электронов, занимающих уровни вблизи потолка зоны, оказывается отрицательной. Фактически это означает, что под совместным действием сил $eE$ и $F_{\text{крист}}$ электрон, находящийся в состоянии с энергией $\varepsilon_C$, получает ускорение, противоположное по направлению внешней силе $eE$.

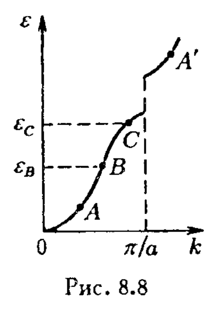


Рис. 8.8

## 8.4. Электропроводность металлов

Соответствующий квантово-механический расчет показывает, что в случае идеальной кристаллической решетки электроны проводимости не испытывали бы при своем движении никакого сопротивления и электропроводность металлов была бы бесконечно большой. Однако кристаллическая решетка никогда не бывает совершенной. Нарушения строгой периодичности решетки бывают обусловлены наличием примесей или вакансий (т. е. отсутствием атомов в узле), а также тепловыми колебаниями решетки. Рассеяние электронов на атомах примеси и на фононах приводит к возникновению электросопротивления металлов. Чем чище металл и ниже температура, тем меньше это сопротивление.

Удельное электрическое сопротивление металлов можно представить в виде

$$\rho = \rho_{\text{колеб}} + \rho_{\text{прим}},$$

где $\rho_{\text{колеб}}$ — сопротивление, обусловленное тепловыми колебаниями решетки, $\rho_{\text{прим}}$ — сопротивление, обусловленное рассеянием электронов на примесных атомах. Слагаемое $\rho_{\text{колеб}}$ уменьшается с понижением температуры и обращается в нуль при $T = 0$ К. Слагаемое $\rho_{\text{прим}}$ при небольшой концентрации примесей не зависит от температуры и образует так называемое *остаточное сопротивление* металла[3]) (т. е. сопротивление, которым металл обладает при 0 К; см. рис. 5.5 кн. 2).

Пусть в единице объема металла имеется $n$ свободных электронов. Назовем среднюю скорость этих электронов *дрейфовой скоростью* $\mathbf{v}_{\text{др}}$. По определению

$$\mathbf{v}_{\text{др}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i. \tag{8.27}$$

В отсутствие внешнего поля дрейфовая скорость равна нулю, и электрический ток в металле отсутствует. При наложении на металл внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ дрейфовая скорость становится отличной от нуля — в металле возникает электрический ток. Согласно закону Ома дрейфовая скорость является конечной и пропорциональной силе $-e\mathbf{E}$.

---

[3]) Речь идет о металлах, не переходящих в сверхпроводящее состояние (см. следующий параграф).

Из механики известно, что скорость установившегося движения оказывается пропорциональной приложенной к телу внешней силе $F$ в том случае, когда, кроме силы $F$, на тело действует сила сопротивления среды, которая пропорциональна скорости тела (примером может служить падение маленького шарика в вязкой среде). Отсюда заключаем, что, кроме силы $-e\mathbf{E}$, на электроны проводимости в металле действует сила «трения», среднее значение которой равно

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -r\mathbf{v}_{\text{др}} \tag{8.28}$$

($r$ — коэффициент пропорциональности).

Уравнение движения для «среднего» электрона имеет вид

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_{\text{др}}}{dt} = -e\mathbf{E} - r\mathbf{v}_{\text{др}}, \tag{8.29}$$

где $m^*$ — эффективная масса электрона (см. § 8.3). Это уравнение позволяет найти установившееся значение $\mathbf{v}_{\text{др}}$.

Если после установления стационарного состояния выключить внешнее поле $\mathbf{E}$, дрейфовая скорость начнет убывать и по достижении состояния равновесия между электронами и решеткой обращается в нуль. Найдем закон убывания дрейфовой скорости после выключения внешнего поля. Положив в (8.29) $\mathbf{E} = 0$, получим уравнение

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_{\text{др}}}{dt} + r\mathbf{v}_{\text{др}} = 0.$$

Уравнение такого вида нам хорошо знакомо. Его решение имеет вид

$$\mathbf{v}_{\text{др}}(t) = \mathbf{v}_{\text{др}}(0) \exp\left(-\frac{r}{m^*}t\right), \tag{8.30}$$

где $\mathbf{v}_{\text{др}}(0)$ — значение дрейфовой скорости в момент выключения поля.

Из (8.30) следует, что за время

$$\tau = \frac{m^*}{r} \tag{8.31}$$

значение дрейфовой скорости уменьшается в $e$ раз. Таким образом, величина (8.31) представляет собой **время релаксации**[4]), характеризующее процесс установления равновесия между электронами и решеткой, нарушенного действием внешнего поля $\mathbf{E}$.

[4]) См. § 1.3 кн. 3.

С учетом (8.31) формула (8.28) может быть написана следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\frac{m^*}{\tau}\mathbf{v}_{\text{др}}. \tag{8.32}$$

Установившееся значение дрейфовой скорости можно найти, приравняв нулю сумму силы $-e\mathbf{E}$ и силы трения (8.32):

$$-e\mathbf{E} - \frac{m^*}{\tau}\mathbf{v}_{\text{др}} = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{v}_{\text{др}} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m^*}.$$

Установившееся значение плотности тока можно получить, умножив это значение $\mathbf{v}_{\text{др}}$ на заряд электрона $-e$ и плотность электронов $n$:

$$\mathbf{j} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m^*}(-e)n = \frac{ne^2\tau}{m^*}\mathbf{E}.$$

Коэффициент пропорциональности между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ представляет собой удельную электропроводность $\sigma$. Таким образом,

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}. \tag{8.33}$$

В § 11.2 кн. 2 было получено следующее классическое выражение для электропроводности металлов:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau'}{2m}, \tag{8.34}$$

где $\tau'$ — среднее время свободного пробега электронов, $m$ — обычная (не эффективная) масса электрона (см. формулу (11.9) кн. 2; мы заменили в этой формуле $\lambda/v$ на время свободного пробега $\tau'$).

Исходя из физических соображений удается произвести оценку величин, входящих в выражение (8.33), и тем самым вычислить по порядку величины проводимость $\sigma$. Полученные таким способом значения находятся в хорошем согласии с опытными данными. Также в согласии с опытом получается, что $\sigma$ изменяется с температурой по закону $1/T$. Напомним, что классическая теория дает, что $\sigma$ обратно пропорциональна $\sqrt{T}$ (см. § 11.2 кн. 2).

Отметим, что выкладки, приведшие к формуле (8.33), одинаково пригодны как при классической трактовке движения электронов проводимости в металле, так и при квантово-механической трактовке. Различие этих двух трактовок заключается в следующем. При классическом рассмотрении предполагается, что все электроны возмущаются внешним электрическим полем, в соответствии с чем каждое слагаемое в формуле (8.27) получает добавку в направлении, противоположном **E**. При квантово-механической трактовке приходится принимать во внимание, что, хотя электрическим полем также возмущаются все электроны, однако их коллективное движение воспринимается в опыте как возмущение полем лишь электронов, занимающих состояния вблизи уровня Ферми. Соответственно только эти электроны вносят вклад в сумму (8.27). Кроме того, при классической трактовке в знаменателе формулы (8.33) должна стоять обычная масса электрона $m$, при квантово-механической трактовке вместо обычной массы должна быть взята эффективная масса электрона $m^*$. Это обстоятельство является проявлением отмеченного в § 8.3 общего правила, согласно которому соотношения, полученные в приближении свободных электронов, оказываются справедливыми и для электронов, движущихся в периодическом поле решетки, если в них заменить истинную массу $m$ электрона эффективной массой $m^*$.

## 8.5. Сверхпроводимость

**Экспериментальные факты.** В 1911 г. Х. Камерлинг-Оннес обнаружил, что электрическое сопротивление ртути при температуре 4,15 К скачкообразно обращается в нуль. Это явление, названное сверхпроводимостью, было затем обнаружено для ряда металлов и сплавов. Температура, при которой происходит переход в сверхпроводящее состояние, называется критической температурой и обозначается $T_к$.

Экспериментально сверхпроводимость можно наблюдать двумя способами:

1) включив в общую электрическую цепь, по которой течет ток, звено из сверхпроводника. В момент перехода в сверхпроводящее состояние разность потенциалов на концах этого звена обращается в нуль;

2) поместив кольцо из сверхпроводника в перпендикулярное к нему магнитное поле. Охладив затем кольцо

ниже $T_к$, выключают поле. В результате в кольце индуцируется незатухающий электрический ток. Ток в таком кольце циркулирует неограниченно долго. Камерлинг-Оннес продемонстрировал это, перевезя сверхпроводящее кольцо с текущим по нему током из Лейдена в Кембридж. В ряде экспериментов наблюдалось отсутствие затухания тока в сверхпроводящем кольце в течение примерно года. В 1959 г. Коллинз сообщил о наблюдавшемся им отсутствии уменьшения тока в течение двух с половиной лет.

Для сверхпроводящего состояния характерно то, что магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводника. Это явление называется **эффектом Мейсснера**[5]. Если сверхпроводящий образец охлаждается, будучи помещенным в магнитное поле, в момент перехода в сверхпроводящее состояние поле выталкивается из образца, и магнитная индукция в образце обращается в нуль. Формально можно сказать, что сверхпроводник обладает нулевой магнитной проницаемостью ($\mu = 0$). Вещества с $\mu < 1$ называются **диамагнетиками**. Таким образом, сверхпроводник является идеальным диамагнетиком.

Достаточно сильное внешнее магнитное поле разрушает сверхпроводящее состояние. Значение магнитной индукции, при котором это происходит, называется **критическим полем** и обозначается $B_к$. Значение $B_к$ зависит от температуры образца. При критической температуре $B_к = 0$, с понижением температуры значение $B_к$ возрастает, стремясь к $B_{к0}$ — значению критического поля при нулевой температуре. Примерный вид этой зависимости показан на рис. 8.9. Если усиливать ток, текущий через сверхпроводник, включенный в общую цепь, то при значении силы тока $I_к$ сверхпроводящее состояние разрушается. Это значение называют **критическим током**. Значение $I_к$ зависит от температуры. Вид этой зависимости аналогичен зависимости $B_к$ от $T$ (см. рис. 8.9).

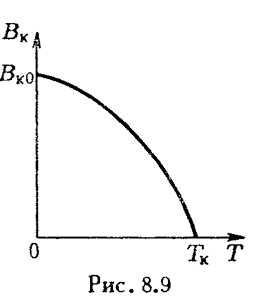


Рис. 8.9

Долгое время сверхпроводящее состояние различных металлов и соединений удавалось получить лишь при весьма низких температурах, достижимых с помощью жидкого гелия. К началу 1986 г. максимальное наблю-

[5]) Вальтер Фриц Мейсснер (1882–1974) — немецкий физик.

давшееся значение критической температуры составляло 23 К. В 1986–1987 гг. был обнаружен ряд высокотемпературных сверхпроводников с критической температурой порядка 100 К. Такая температура достигается с помощью жидкого азота. В отличие от гелия жидкий азот получают в промышленном масштабе.

Все открытые до сих пор высокотемпературные сверхпроводники принадлежат к группе металлооксидной керамики (соединений типа La–Ba–Cu–O и Y–Ba–Cu–O). Исследование уже открытых и поиск новых высокотемпературных сверхпроводников производятся очень интенсивно широким фронтом в ряде стран (в том числе и у нас в стране).

Огромный интерес к высокотемпературным сверхпроводникам обусловлен, в частности, тем, что материалы с критической температурой порядка 300 К произведут подлинную техническую революцию. Например, использование сверхпроводящих линий электропередач полностью устранит потери мощности в проводах.

**Понятие о теории сверхпроводимости.** Сверхпроводимость представляет собой явление, в котором, как и в сверхтекучести, квантово-механические эффекты обнаруживаются не в микроскопических, а в макроскопических масштабах. Теория сверхпроводимости была создана в 1957 г. Бардином[6]), Купером[7]) и Шриффером[8]). Ее называют кратко теорией БКШ. Независимо от них в 1958 г. Н.Н. Боголюбов[9]) разработал более совершенный вариант теории сверхпроводимости.

Теория сверхпроводимости очень сложна. Поэтому нам придется ограничиться изложением теории БКШ на уровне научно-популярных книг.

Разгадка сверхпроводимости заключается в том, что электроны в металле, кроме кулоновского отталкивания, испытывают особый вид взаимного притяжения, которое в сверхпроводящем состоянии преобладает над отталкиванием. В результате электроны проводимости объединяются в так называемые *куперовские пары*. Электроны, входящие в такую пару, имеют противоположно

---

[6]) Джон Бардин (р. в 1908 г.) — американский физик.

[7]) Леон Купер (р. в 1930 г.) — американский физик.

[8]) Джон Роберт Шриффер (р. в 1931 г.) — американский физик.

[9]) Николай Николаевич Боголюбов (р. в 1909 г.) — советский математик и физик.

направленные спины. Поэтому спин пары равен нулю, и она представляет собой бозон. Бозоны склонны накапливаться в основном энергетическом состоянии, из которого их сравнительно трудно перевести в возбужденное состояние. Следовательно, куперовские пары, придя в согласованное движение, остаются в этом состоянии неограниченно долго. Такое согласованное движение пар и есть ток сверхпроводимости.

Поясним сказанное более подробно. Электрон, движущийся в металле, деформирует (поляризует) состоящую из положительных ионов кристаллическую решетку. В результате этой деформации электрон оказывается окруженным «облаком» положительного заряда, перемещающимся по решетке вместе с электроном. Электрон и окружающее его облако представляют собой положительно заряженную систему, к которой будет притягиваться другой электрон. Таким образом, кристаллическая решетка играет роль промежуточной среды, наличие которой приводит к притяжению между электронами.

На квантово-механическом языке притяжение между электронами объясняется как результат обмена между электронами квантами возбуждения решетки — фононами. Электрон, движущийся в металле, нарушает режим колебаний решетки — возбуждает фононы. Энергия возбуждения передается другому электрону, который поглощает фонон. В результате такого обмена фононами возникает дополнительное взаимодействие между электронами, которое имеет характер притяжения. При низких температурах это притяжение у веществ, являющихся сверхпроводниками, превышает кулоновское отталкивание.

Взаимодействие, обусловленное обменом фононами, наиболее сильно проявляется у электронов, обладающих противоположными импульсами и спинами. В результате два таких электрона объединяются в куперовскую пару. Эту пару не следует представлять себе как два слипшихся электрона. Напротив, расстояние между электронами пары весьма велико, оно составляет примерно $10^{-4}$ см, т. е. на четыре порядка превышает межатомные расстояния в кристалле. Примерно $10^6$ куперовских пар заметно перекрываются, т. е. занимают общий объем.

В куперовские пары объединяются не все электроны проводимости. При температуре $T$, отличной от абсолютного нуля, имеется некоторая вероятность того, что пара будет разрушена. Поэтому всегда наряду с парами име-

ются «нормальные» электроны, движущиеся по кристаллу обычным образом. Чем ближе $T$ к $T_к$, тем доля нормальных электронов становится больше, обращаясь в единицу при $T = T_к$. Следовательно, при температуре выше $T_к$ сверхпроводящее состояние невозможно.

Образование куперовских пар приводит к перестройке энергетического спектра металла. Для возбуждения электронной системы, находящейся в сверхпроводящем состоянии, надо разрушить хотя бы одну пару, на что требуется энергия, равная энергии связи $E_{св}$ электронов в паре. Эта энергия представляет собой минимальное количество энергии, которое может воспринять система электронов сверхпроводника. Следовательно, в энергетическом спектре электронов, находящихся в сверхпроводящем состоянии, имеется щель ширины $E_{св}$, расположенная в области уровня Ферми. Значения энергии, принадлежащие этой щели, запрещены. Существование щели было доказано экспериментально.

Итак, возбужденное состояние электронной системы, находящейся в сверхпроводящем состоянии, отделено от основного состояния энергетической щелью ширины $E_{св}$. Поэтому квантовые переходы этой системы не всегда будут возможными. При малых скоростях своего движения (отвечающих силе тока, меньшей $I_к$) электронная система не будет возбуждаться, а это и означает движение без трения, т. е. без электрического сопротивления.

Ширина энергетической щели $E_{св}$ с ростом температуры уменьшается и обращается в нуль при критической температуре $T_к$. Соответственно все куперовские пары разрушаются, и вещество переходит в нормальное (несверхпроводящее) состояние.

Из теории сверхпроводимости следует, что магнитный поток $\Phi$, связанный со сверхпроводящим кольцом (или цилиндром), по которому циркулирует ток, должен быть целым кратным величины $2\pi\hbar/q$, где $q$ — заряд носителя тока,

$$\Phi = n \cdot 2\pi\hbar/q.$$

Величина

$$\Phi_0 = 2\pi\hbar/q \tag{8.35}$$

представляет собой к в а н т  м а г н и т н о г о  п о т о к а.

Квантование магнитного потока было экспериментально обнаружено в 1961 г. Дивером и Фейрбэнком и независимо от них Доллом и Небауэром. В опытах Ди-

вера и Фейрбэнка образцом служил поясок олова, нанесенный на медную проволоку диаметром около 0,01 мм. Проволока играла роль каркаса и в сверхпроводящее состояние не переходила. Измеренные значения магнитного потока в этих опытах, как и в опытах Долла и Небауэра, оказались целыми кратными величины (8.35), в которой в качестве $q$ надо взять удвоенный заряд электрона ($q = -2e$). Это служит дополнительным подтверждением правильности теории БКШ, согласно которой носителями тока в сверхпроводнике являются куперовские пары, заряд которых равен суммарному заряду двух электронов, т. е. $-2e$.

**Эффект Джозефсона.** В 1962 г. Джозефсон[10]) предсказал на основе теории сверхпроводимости существование явления, которое было обнаружено экспериментально в 1963 г. и получило название эффекта Джозефсона.

Эффект Джозефсона заключается в протекании сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника. Этот слой называется контактом Джозефсона и обычно представляет собой пленку окиси металла толщиной около 1 нм. Электроны проводимости проходят через диэлектрический контакт благодаря туннельному эффекту (см. § 4.9). Аналогичный эффект наблюдается, когда между сверхпроводниками находится тонкий слой металла в несверхпроводящем состоянии или полупроводника, а также если сверхпроводники соединены тонкой перемычкой, например, точечным контактом.

Различают два эффекта Джозефсона — стационарный и нестационарный.

Стационарный эффект наблюдается при условии, что ток через контакт Джозефсона не превышает определенного значения, называемого критическим током контакта. При стационарном эффекте падение напряжения на контакте отсутствует.

Если ток через контакт превышает критическое значение, наблюдается нестационарный эффект Джозефсона. В этом случае на контакте возникает падение напряжения $U$ и контакт начинает излучать электромагнитные волны с частотой $\omega = 2eU/\hbar$. Известно, что излучать электромагнитные волны может только переменный

[10]) Брайан Джозефсон (р. в 1940 г.) — английский физик.

ток. Именно такой ток течет через контакт при постоянном напряжении $U$ на контакте. Квантовое объяснение излучения состоит в том, что электронная пара при прохождении через контакт приобретает энергию $2eU$, которая является избыточной по отношению к энергии основного состояния сверхпроводника. Возвращаясь в основное состояние, электронная пара излучает квант частоты $2eU/\hbar$.

В эффекте Джозефсона непосредственно проявляется важнейшее свойство сверхпроводника — согласованное поведение его электронов.

Эффект Джозефсона нашел применение для создания уникальных по точности приборов для измерения малых токов (до $10^{-10}$ А), напряжений (до $10^{-15}$ В), магнитных полей (до $10^{-18}$ Тл) и др.

## 8.6. Электропроводность полупроводников

Полупроводниками являются кристаллические вещества, у которых при 0 К валентная зона полностью заполнена электронами (см. рис. 8.7 *б*), а ширина запрещенной зоны невелика (см. с. 229). Полупроводники обязаны своим названием тому обстоятельству, что по величине электропроводности они занимают промежуточное положение между металлами и диэлектриками. Однако характерным для них является не величина проводимости, а то, что их проводимость растет с повышением температуры (напомним, что у металлов она уменьшается).

Различают собственные и примесные полупроводники. К числу собственных относятся химически чистые полупроводники. Электрические свойства примесных полупроводников определяются имеющимися в них искусственно вводимыми примесями.

При рассмотрении электрических свойств полупроводников большую роль играет понятие «дырка». Остановимся на выяснении физического смысла этого понятия.

В собственном полупроводнике при абсолютном нуле все уровни валентной зоны полностью заполнены электронами, а в зоне проводимости электроны отсутствуют (рис. 8.10 *а*). Электрическое поле не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости. Поэтому собственные полупроводники ведут себя при абсолютном нуле как диэлектрики. При температурах, отличных от 0 К, часть электронов с верхних уровней валентной зоны переходит в результате теплового возбуждения

на нижние уровни зоны проводимости (рис. 8.10б). В этих условиях электрическое поле получает возможность изменять состояние электронов, находящихся в зоне проводимости. Кроме того, вследствие образования вакантных уровней в валентной зоне электроны этой зоны также

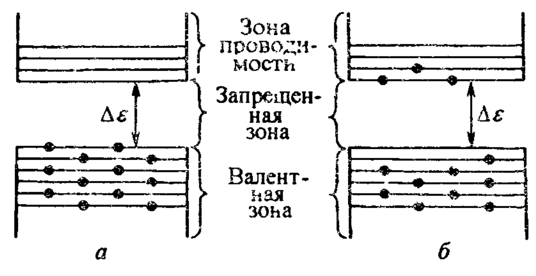



Рис. 8.10

могут изменять свою скорость под воздействием внешнего поля. В результате электропроводность полупроводника становится отличной от нуля.

Оказывается, что при наличии вакантных уровней поведение электронов валентной зоны может быть представлено как движение положительно заряженных квазичастиц, получивших название дырок. Из равенства нулю проводимости полностью заполненной валентной зоны вытекает, что сумма скоростей всех электронов такой зоны равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{v}_i = 0.$$

Выделим из этой суммы скорость $k$-го электрона:

$$\sum_{i\neq k} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_k = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i\neq k} \mathbf{v}_i = -\mathbf{v}_k.$$

Из полученного соотношения вытекает, что если $k$-й электрон в валентной зоне отсутствует, то сумма скоростей оставшихся электронов оказывается равной $-\mathbf{v}_k$. Следовательно, все эти электроны создадут ток, равный $(-e)\times\times(-\mathbf{v}_k) = e\mathbf{v}_k$. Таким образом, возникший ток оказывается эквивалентным току, который создавала бы частица с зарядом $+e$, имеющая скорость отсутствующего электрона. Эта воображаемая частица и есть дырка.

К понятию дырок можно прийти также следующим путем. Вакантные уровни образуются у потолка валентной зоны. В § 8.3 было выяснено, что эффективная масса электрона, находящегося у потолка энергетической зоны, является отрицательной. Отсутствие частицы с отрицательным зарядом $-e$ и отрицательной массой $m^*$ эквивалентно наличию частицы с положительным зарядом $+e$ и положительной массой $|m^*|$, т. е. дырки.

Итак, по своим электрическим свойствам валентная зона с небольшим числом вакантных состояний эквивалентна пустой зоне, содержащей небольшое число положительно заряженных квазичастиц, называемых дырками.

Подчеркнем, что движение дырки не есть перемещение какой-то реальной положительно заряженной частицы. Представление о дырках отображает характер движения всей многоэлектронной системы в полупроводнике.

**Собственная проводимость полупроводников.** Собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется некоторое число носителей тока — электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях, в результате чего появляются дырки.

Распределение электронов по уровням валентной зоны и зоны проводимости описывается функцией Ферми—Дирака (см. формулу (8.4)). Это распределение можно сделать очень наглядным, изобразив, как это сделано на

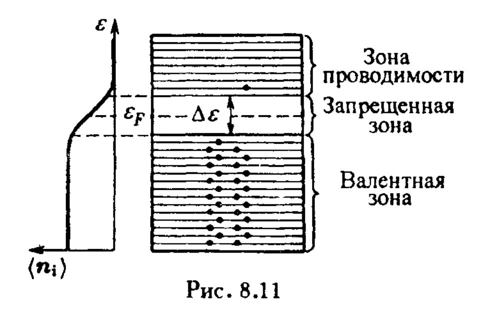



Рис. 8.11

рис. 8.11, график функции распределения совместно со схемой энергетических зон.

Соответствующий расчет дает, что у собственных полупроводников отсчитанное от потолка валентной зоны зна-

чение уровня Ферми равно

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2}\Delta\varepsilon + \frac{3}{4}kT\ln\frac{m^*_{д}}{m^*_{э}},$$

где $\Delta\varepsilon$ — ширина запрещенной зоны, а $m^*_{д}$ и $m^*_{э}$ — эффективные массы дырки и электрона, находящегося в зоне проводимости. Обычно второе слагаемое пренебрежимо мало, и можно полагать $\varepsilon_F = (1/2)\Delta\varepsilon$. Это означает, что уровень Ферми лежит посредине запрещенной зоны (см. рис. 8.11). Следовательно, для электронов, перешедших в зону проводимости, величина $\varepsilon - \varepsilon_F$ мало отличается от половины ширины запрещенной зоны. Уровни зоны проводимости лежат на хвосте кривой распределения. Поэтому вероятность их заполнения электронами можно находить по формуле (7.15). Положив в этой формуле $\varepsilon - \varepsilon_F \approx \Delta\varepsilon/2$, получим, что

$$f(\varepsilon) \sim \exp(-\Delta\varepsilon/2kT). \qquad (8.36)$$

Количество электронов, перешедших в зону проводимости, а следовательно, и количество образовавшихся дырок, будет пропорционально выражению (8.36). Эти электроны и дырки являются носителями тока. Поскольку проводимость пропорциональна числу носителей, она также должна быть пропорциональна выражению (8.36). Следовательно, электропроводность собственных полупроводников быстро растет с температурой, изменяясь по закону

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\Delta\varepsilon/2kT), \qquad (8.37)$$

где $\Delta\varepsilon$ — ширина запрещенной зоны, $\sigma_0$ — величина, изменяющаяся с температурой гораздо медленнее, чем экспонента, в связи с чем ее можно в первом приближении считать константой.

Если на графике откладывать зависимость $\ln\sigma$ от $1/T$, то для собственных полупроводников получается прямая линия, изображенная на рис. 8.12. По наклону этой прямой можно определить ширину запрещенной зоны $\Delta\varepsilon$.

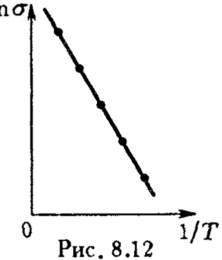


Рис. 8.12

Типичными полупроводниками являются элементы IV группы периодической системы Менделеева — германий и кремний. Они образуют решетку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными (парно-электронными) связями с четырьмя равноотстоящими от него

соседними атомами (см. рис. 4.6 *а* кн. 3). Условно такое взаимное расположение атомов можно представить в виде плоской структуры, изображенной на рис. 8.13. Кружки со

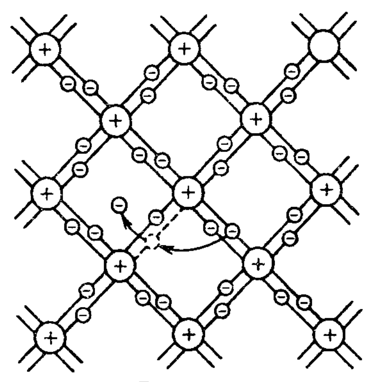


Рис. 8.13

знаком «+» обозначают положительно заряженные атомные остатки (т. е. ту часть атома, которая остается после удаления валентных электронов), кружки со знаком «—» — валентные электроны, двойные линии — ковалентные связи.

При достаточно высокой температуре тепловое движение может разорвать отдельные пары, освободив один электрон. Покинутое электроном место перестает быть нейтральным, в его окрестности возникает избыточный положительный заряд $+e$, т. е. образуется дырка (на рис. 8.13 она изображена штриховым кружком). На это место может перескочить электрон одной из соседних пар. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освободившийся электрон.

При встрече свободного электрона с дыркой они р е к о м б и н и р у ю т (соединяются). Это означает, что электрон нейтрализует избыточный положительный заряд, имеющийся в окрестности дырки, и теряет свободу передвижения до тех пор, пока снова не получит от кристаллической решетки энергию, достаточную для своего высвобождения. Рекомбинация приводит к одновременному исчезновению свободного электрона и дырки. На схеме уровней (см. рис. 8.11) процессу рекомбинации соответствует переход электрона из зоны проводимости на один из свободных уровней валентной зоны.

Итак, в собственном полупроводнике идут одновременно два процесса: рождение попарно свободных электронов и дырок и рекомбинация, приводящая к попарному исчезновению электронов и дырок. Вероятность первого процесса быстро растет с температурой. Вероятность рекомбинации пропорциональна как числу свободных электронов, так и числу дырок. Следовательно, каждой температуре соответствует определенная равновесная концентрация электронов и дырок, которая изменяется с температурой пропорционально выражению (8.36).

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля и дырок в направлении поля. Оба движения — и дырок, и электронов — приводят к переносу заряда вдоль кристалла. Следовательно, собственная электропроводность обусловливается как бы носителями заряда двух знаков — отрицательными и положительными дырками.

Отметим, что при достаточно высокой температуре собственная проводимость наблюдается во всех без исключения полупроводниках. Однако в полупроводниках, содержащих примесь, электропроводность слагается из собственной и примесной проводимостей.

**Примесная проводимость полупроводников.** Примесная проводимость возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов. На рис. 8.14 условно изображена решетка германия с примесью пятивалентных атомов фосфора. Для образования ковалент-

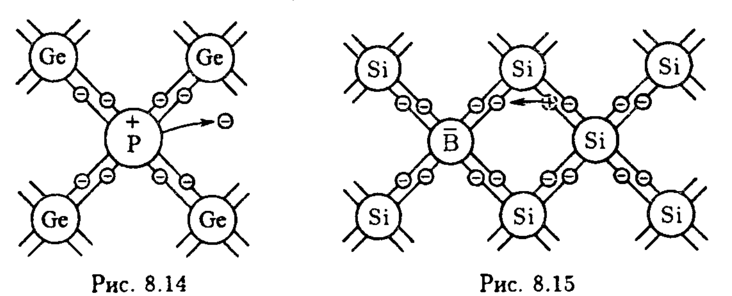



Рис. 8.14 Рис. 8.15

ных связей с соседями атому фосфора достаточно четырех электронов. Следовательно, пятый валентный элек-

трон оказывается как бы лишним и легко отщепляется от атома за счет энергии теплового движения, образуя странствующий свободный электрон.

В отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентных связей, т. е. образованием дырки. Хотя в окрестности атома примеси возникает избыточный положительный заряд, но он связан с этим атомом и перемещаться по решетке не может. Благодаря этому заряду атом примеси может захватить приблизившийся к нему электрон, но связь захваченного электрона с атомом будет непрочной и легко нарушается вновь за счет тепловых колебаний решетки.

Таким образом, в полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу больше валентности основных атомов, имеется только один вид носителей тока — электроны. Соответственно говорят, что такой полупроводник обладает электронной проводимостью или является полупроводником $n$-типа (от слова negative — отрицательный). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются **донорами**.

Теперь рассмотрим случай, когда валентность примеси на единицу меньше валентности основных атомов. На рис. 8.15 условно изображена решетка кремния с примесью трехвалентных атомов бора. Трех валентных электронов атома бора недостаточно для образования связей со всеми четырьмя соседями. Поэтому одна из связей окажется неукомплектованной и будет представлять собой место, способное захватить электрон. При переходе на это место электрона одной из соседних пар возникнет дырка, которая будет кочевать по кристаллу. Вблизи атома примеси возникнет избыточный отрицательный заряд, но он будет связан с данным атомом и не может стать носителем тока.

Таким образом, в полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, возникают носители тока только одного вида — дырки. Проводимость в этом случае называется дырочной, а о полупроводнике говорят, что он принадлежит к $p$-типу (от слова positive — положительный). Примеси, вызывающие возникновение дырок, называются **акцепторными**.

Электронный характер проводимости полупроводников $n$-типа и дырочный характер проводимости полупро-

водников $p$-типа подтверждается экспериментально при исследовании эффекта Холла (см. § 11.3 кн. 2). Наблюдаемый знак холловской разности потенциалов соответствует в полупроводниках $n$-типа отрицательным носителям тока, а в полупроводниках $p$-типа — положительным носителям.

Примеси искажают поле решетки, что приводит к возникновению на энергетической схеме примесных уровней, расположенных в запрещенной зоне кристалла. В случае полупроводников $n$-типа примесные уровни называются донорными (рис. 8.16 *а*), в случае полупроводников $p$-типа акцепторными (рис. 8.16 *б*).

Уровень Ферми в полупроводниках $n$-типа располагается в верхней половине запрещенной зоны, а в полупроводниках $p$-типа — в нижней половине запрещенной

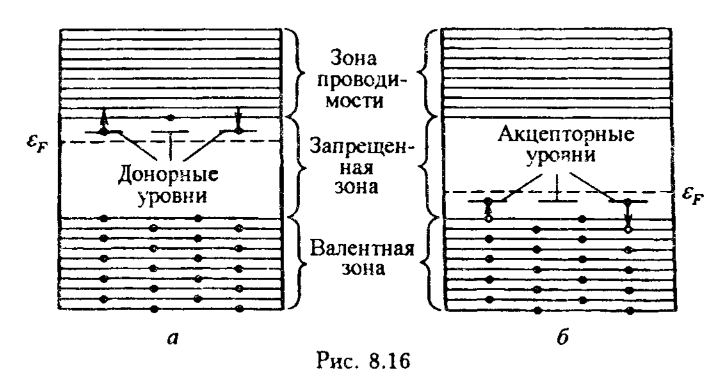


Рис. 8.16

зоны. При повышении температуры уровень Ферми в полупроводниках обоих типов смещается к середине запрещенной зоны.

Если донорные уровни расположены недалеко от потолка валентной зоны[11]), они не могут существенно повлиять на электрические свойства кристалла. Иначе обстоит дело, когда расстояние таких уровней от дна зоны проводимости гораздо меньше, чем ширина запрещенной зоны. В этом случае энергия теплового движения даже при обычных температурах оказывается достаточной для того, чтобы перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости (см. рис. 8.16 *а*). Этому процессу соответ-

[11]) Это значит, что пятый валентный электрон прочно связан со своим атомом.

ствует отщепление пятого валентного электрона от атома примеси. Захвату свободного электрона атомом примеси соответствует на рис. 8.16 *а* переход электрона из зоны проводимости на один из донорных уровней.

Акцепторные уровни оказывают существенное влияние на электрические свойства кристалла в том случае, если они расположены недалеко от потолка валентной зоны (см. рис. 8.16 *б*). Образованию дырки отвечает переход электрона из валентной зоны на акцепторный уровень. Обратный переход соответствует разрыву одной из четырех ковалентных связей атома примеси с его соседями и рекомбинации образовавшегося при этом электрона и дырки.

При повышении температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это означает, что практически освобождаются все донорные или заполняются электронами все акцепторные уровни. Вместе с тем по мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны в зону проводимости. Таким образом, при высоких температурах проводимость полупроводника будет складываться из примесной и собственной проводимостей. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких — собственная проводимость.

Глава 9

# Контактные и термоэлектрические явления

## 9.1. Работа выхода

Электроны проводимости не покидают самопроизвольно металл в заметном количестве. Это объясняется тем, что металл представляет для них потенциальную яму. Покинуть металл удается только тем электронам, энергия которых оказывается достаточной для преодоления потенциального барьера, имеющегося на поверхности. Силы, обусловливающие этот барьер, имеют следующее происхождение. Случайное удаление электрона от наружного слоя положительных ионов решетки приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Кулоновское взаимодействие с этим зарядом заставляет электрон, скорость которого не очень велика, вернуться обратно. Таким образом, отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляются от нее на несколько межатомных расстояний и затем поворачивают обратно. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов. Это облако образует совместно с наружным слоем ионов двойной электрический слой (рис. 9.1; кружки — ионы, черные точки — электроны). Силы, действующие на электрон в таком слое, направлены внутрь

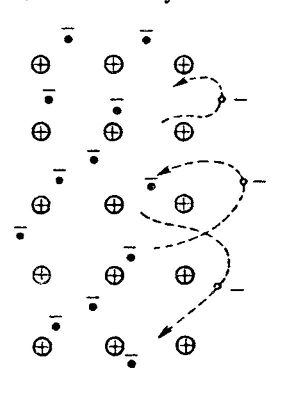


Рис. 9.1

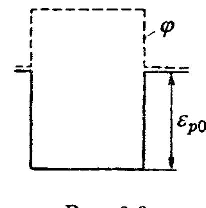



Рис. 9.2

металла. Работа, совершаемая против этих сил при переводе электрона из металла наружу, идет на увеличение потенциальной энергии электрона $\varepsilon_p$.

Таким образом, потенциальная энергия валентных электронов[1]) внутри металла меньше, чем вне металла, на величину, равную глубине потенциальной ямы $\varepsilon_{p0}$ (рис. 9.2). Изменение энергии происходит на длине порядка нескольких межатомных расстояний, поэтому стенки ямы можно считать вертикальными.

Потенциальная энергия электрона $\varepsilon_p = -e\varphi$ и потенциал $\varphi$ той точки, в которой находится электрон, имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что потенциал внутри металла больше, чем потенциал в непосредственной близости к его поверхности (мы будем для краткости говорить просто «на поверхности»), на величину $\varepsilon_{p0}/e$.

Сообщение металлу избыточного положительного заряда увеличивает потенциал как на поверхности, так и внутри металла. Потенциальная энергия электрона соответственно уменьшается (рис. 9.3 *а*). Напомним, что за

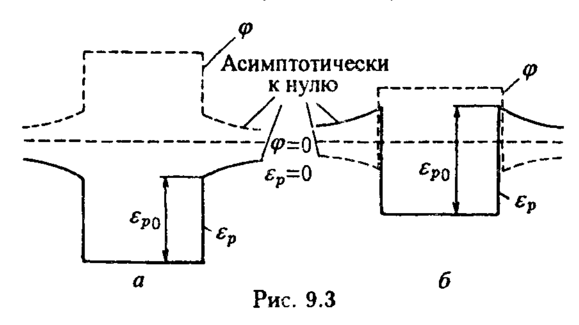



Рис. 9.3

начало отсчета приняты значения потенциала и потенциальной энергии на бесконечности. Сообщение отрицательного заряда понижает потенциал внутри и вне металла. Соответственно потенциальная энергия электрона возрастает (рис. 9.3 *б*).

Полная энергия электрона в металле слагается из потенциальной и кинетической энергий. В § 8.1 было выяснено, что при абсолютном нуле значения кинетической

[1]) Потенциальная яма для электронов, заполняющих уровни нижних зон (т. е. прочно связанных со своими атомами), имеет большую глубину. Все рассуждения этого параграфа относятся к валентным электронам.

энергии электронов проводимости заключены в пределах от нуля до совпадающей с уровнем Ферми энергии $\varepsilon_{max}$. На рис. 9.4 энергетические уровни зоны проводимости вписаны в потенциальную яму (штрихами изображены незанятые при 0 К уровни). Для удаления за пределы металла разным электронам нужно сообщить не одинаковую энергию. Так, электрону, находящемуся на самом нижнем уровне зоны проводимости, необходимо сообщить энергию $\varepsilon_{p0}$; для электрона, находящегося на уровне Ферми, достаточна энергия $\varepsilon_{p0} - \varepsilon_{max} = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_F$.

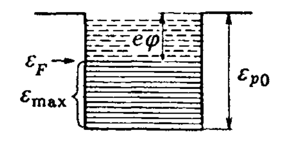


Рис. 9.4

Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется **работой выхода**. Работу выхода принято обозначать через $e\varphi$, где $\varphi$ — величина, называемая **потенциалом выхода**.

В соответствии со сказанным выше, работа выхода[2]) электрона из металла определяется выражением

$$e\varphi = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_F. \tag{9.1}$$

Мы получили это выражение в предположении, что температура металла равна 0 К. При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми, т. е. распространяют определение (9.1) на любые температуры. Это же определение применяется и для полупроводников.

Уровень Ферми зависит от температуры (см. формулу (8.16)). Кроме того, из-за обусловленного тепловым расширением изменения средних расстояний между атомами слегка изменяется глубина потенциальной ямы $\varepsilon_{p0}$. Это приводит к тому, что работа выхода немного зависит от температуры.

Работа выхода очень чувствительна к состоянию поверхности металла, в частности к ее чистоте. Подобрав надлежащим образом покрытие поверхности, можно сильно снизить работу выхода. Так, например, нанесение на поверхность вольфрама слоя окисла щелочноземельного металла (Ca, Sr, Ba) снижает работу выхода с 4,5 эВ (для чистого W) до 1,5–2 эВ.

---

[2]) Определяемую выражением (9.1) величину иногда называют эффективной работой выхода, а $\varepsilon_{p0}$ — полной работой выхода.

## 9.2. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы

При температурах, отличных от абсолютного нуля, имеется некоторое количество электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер, имеющийся на границе металла. При повышении температуры количество таких электронов резко возрастает и делается вполне заметным. Испускание электронов нагретым металлом называется **термоэлектронной эмиссией**.

Исследование термоэлектронной эмиссии осуществляется с помощью схемы, изображенной на рис. 9.5. Основным элементом схемы является **двухэлектродная лампа**, называемая также **вакуумным диодом**. Она

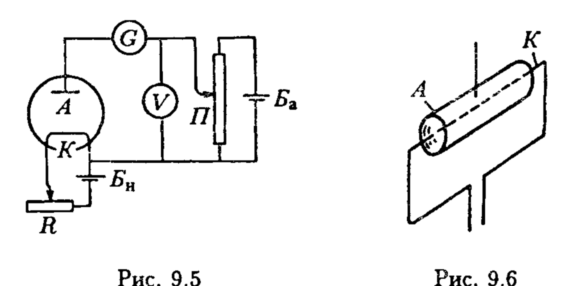



Рис. 9.5 Рис. 9.6

представляет собой хорошо откачанный металлический или стеклянный баллон, внутри которого имеются два электрода — катод $K$ и анод $A$. Конструктивно электроды могут быть выполнены разными способами. В простейшем случае катод имеет форму тонкой прямой нити, анод — коаксиального с ней цилиндра (рис. 9.6).

Катод нагревается током, создаваемым батареей накала $Б_н$ (см. рис. 9.5). Температуру катода можно менять, регулируя с помощью реостата $R$ силу тока накала. На электроды подается напряжение от анодной батареи $Б_а$. Анодное напряжение $U_а$ можно изменять с помощью потенциометра $П$ и измерять вольтметром $V$ ($U_а$ считается положительным, если потенциал анода выше потенциала катода). Гальванометр $G$ предназначен для измерения силы анодного тока $I_а$.

При постоянном токе накала катода кривая зависимости силы анодного тока $I_а$ от анодного напряжения $U_а$ имеет вид, показанный на рис. 9.7. Эта кривая называется

**вольт-амперной характеристикой диода.** Различные кривые на рис. 9.7 соответствуют разным температурам катода. При малых значениях $U_а$ эти кривые совпадают.

Рассмотрим характерные особенности кривых $I_а = f(U_а)$. При $U_а = 0$ вылетевшие из катода электроны образуют вокруг него отрицательный пространственный заряд — электронное облако. Это облако отталкивает вылетающие из катода электроны и большую часть их возвращает обратно. Все же небольшому числу электронов удается долететь до анода, в результате чего в анодной цепи будет течь слабый ток. Чтобы полностью прекратить попадание на анод электронов, т. е. сделать $I_а$ равным нулю, необходимо приложить между катодом и анодом некоторое отрицательное напряжение. Следовательно, вольт-амперная характеристика диода начинается не в нуле, а немного левее начала координат.

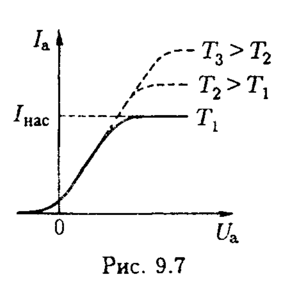


Рис. 9.7

Из рис. 9.7 вытекает, что закон Ома для вакуумного диода не выполняется. Начальный участок кривой довольно хорошо следует полученному теоретически Ленгмюром и Богуславским[3]) **закону трех вторых.** Согласно этому закону сила анодного тока изменяется пропорционально $U_а^{3/2}$.

С ростом $U_а$ все большее число электронов отсасывается электрическим полем к аноду и, наконец, при определенном значении $U_а$ электронное облако полностью рассасывается и все вылетевшие из катода электроны получают возможность достигнуть анода. Дальнейший рост $U_а$ не может увеличить силу анодного тока — ток достигает насыщения.

Очевидно, что именно ток насыщения характеризует термоэлектронную эмиссию. Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает $N$ электронов, то плотность тока насыщения (сила тока насыщения, отнесенная к единице поверхности катода) будет равна $j_{нас} = Ne$. Следовательно, измеряя плотность тока насыщения при различной силе тока накала, можно найти количество

[3]) Ирвинг Ленгмюр (1881–1957) — американский физик.
Сергей Анатольевич Богуславский (1883–1923) — русский физик.

электронов, вылетающих с единицы поверхности при разных температурах.

Исходя из квантовых представлений, Дэшман получил в 1923 г. для тока насыщения следующую формулу:

$$j_{\text{нас}} = AT^2 \exp(-e\varphi/kT). \tag{9.2}$$

Здесь $e\varphi$ — работа выхода, $A$ — не зависящая от рода металла константа, теоретическое значение которой равно 120 А/(см$^2$·К$^2$). Экспериментальные значения константы $A$ намного меньше теоретического и сильно различаются для разных металлов. Температурный ход тока насыщения формула (9.2) передает вполне удовлетворительно. График функции (9.2) дан на рис. 9.8.

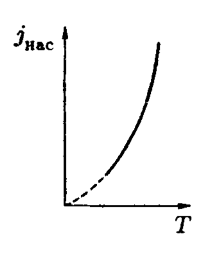


Рис. 9.8

Ричардсон[4]) вывел в 1901 г. классическую формулу для термоэлектронной эмиссии. Она отличается от (9.2) лишь тем, что вместо $T^2$ в нее входит $\sqrt{T}$. Формула (9.2) называется формулой Ричардсона—Дэшмана.

Из (9.2) следует, что уменьшение $e\varphi$ резко повышает эмиссию (легко убедиться в том, что при 1160 К, т. е. при $kT = 0,10$ эВ, уменьшение $e\varphi$ от 3 до 1 эВ приводит к возрастанию $j_{\text{нас}}$ почти в $5 \cdot 10^8$ раз). Поэтому при изготовлении электронных ламп применяются специальные покрытия и способы обработки катодов, приводящие к снижению работы выхода. Современные так называемые оксидные катоды, изготовляемые из никеля, покрытого окисью бария или стронция, имеют работу выхода примерно 1,0–1,2 эВ.

Диод пропускает ток только в том случае, когда потенциал анода выше, чем катода. При отрицательном напряжении ток в анодной цепи отсутствует. Это свойство диода позволяет использовать его для выпрямления переменного тока. Диод, предназначенный для этой цели, называют также кенотроном. На рис. 9.9 показан сплошной линией график тока, текущего через кенотрон, если на него подается переменное напряжение, изменяющееся со временем по гармоническому закону. В этом случае ток в цепи течет лишь в течение половины периода, в связи с чем такой способ выпрямления тока называется однополупериодным.

---

[4]) Оуэн Уилланс Ричардсон (1879–1959) — английский физик.

Используя одновременно два кенотрона или двойной диод, собранный в одном баллоне, можно осуществить двухполупериодное выпрямление. Соответствующая схема изображена на рис. 9.10. Первичная обмотка трансформатора питается переменным током. Вторичных обмоток две. Меньшая служит для накала катода. Большая обмотка имеет средний вывод, который через нагрузку $R$ соединен с катодом. Концы обмотки идут к анодам.

Рис. 9.9

Рис. 9.10

Одну половину периода под более высоким потенциалом, чем катод, находится один анод, вторую половину — другой. В результате через нагрузку течет ток, изображенный графически на рис. 9.11. Такой пульсирующий ток можно сгладить.

Если между катодом и анодом поместить третий электрод в виде сетки, получится трехэлектродная лампа — **триод** (рис. 9.12; цепь накала на схеме опущена). Сетка может быть выполнена, например, в виде спирали, обви-

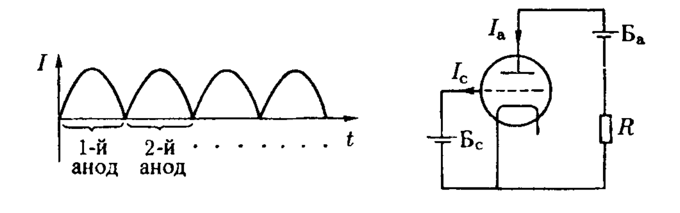



Рис. 9.11

Рис. 9.12

вающейся вокруг катода. При сообщении сетке небольшого положительного потенциала относительно катода (в этом случае напряжение $U_c$ между сеткой и катодом мы будем считать положительным) электроны будут быстрее отсасываться от катода. Некоторые из них попадут на

сетку (в результате чего возникнет небольшой сеточный ток $I_c$), но основная часть пролетит сквозь сетку и достигнет анода. Из-за близости сетки к катоду небольшие изменения напряжения между сеткой и катодом оказывают большое влияние на силу анодного тока.

Отрицательное сеточное напряжение $U_c$ уменьшает анодный ток, и при достаточно большом отрицательном напряжении $U_c$ ток прекращается полностью — лампа оказывается запертой.

Если построить зависимость анодного тока $I_a$ от сеточного напряжения $U_c$ при постоянном анодном напряжении $U_a$, получается кривая, изображенная на рис. 9.13.

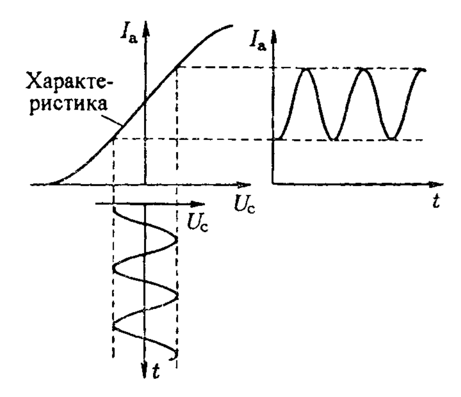



Рис. 9.13

Совокупность таких кривых, построенных для разных значений $U_a$, образует семейство **сеточных характеристик** триода. Величина

$$S = \frac{dI_a}{dU_c}$$

называется **крутизной характеристики**.

Значительная часть характеристики прямолинейна. Это дает возможность, подавая на сетку небольшое синусоидальное напряжение $U_c$, получать большие синусоидальные изменения анодного тока. При этом с сопротивления $R$ может быть снято переменное напряжение с гораздо большей амплитудой, чем амплитуда $U_c$. На этом основано действие триода как усилителя. Кроме того, триод может быть использован для преобразования (изменения

формы) и генерирования (возбуждения) переменных токов и напряжений.

Для улучшения характеристик электронной лампы в нее вводятся дополнительные электроды — сетки. Лампа с двумя сетками, т. е. четырехэлектродная лампа, называется тетродом, пятиэлектродная — пентодом и т. д. Широкое применение получили также лампы, в которых в одном баллоне совмещены две системы электродов. Каждая такая лампа выполняет функции двух ламп.

## 9.3. Контактная разность потенциалов

Если привести два разных металла в соприкосновение, между ними возникает разность потенциалов, которая называется *контактной*. В результате в окружающем металлы пространстве появляется электрическое поле. На рис. 9.14 изображены эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и линии напряженности (штриховые) этого поля; поверхность каждого из металлов является эквипотенциальной.

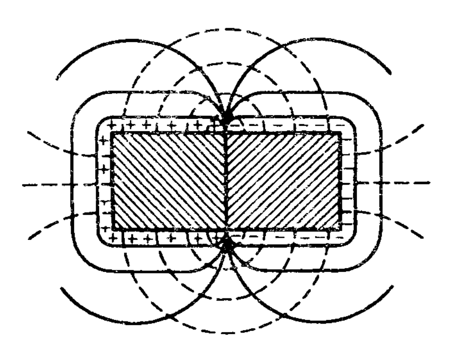


Рис. 9.14

Контактная разность потенциалов обусловлена тем, что при соприкосновении металлов часть электронов из одного металла переходит в другой. В верхней части рис. 9.15 изображены два металла — слева до приведения их в соприкосновение, справа — после. В нижней части рисунка даны графики потенциальной энергии электрона. Уровень Ферми в первом металле лежит, по предположению, выше, чем во втором. Естественно, что при возникновении контакта между металлами электроны с самых высоких уровней в первом металле станут переходить на более низкие свободные уровни второго металла. В результате потенциал первого металла возрастет, а второго — уменьшится. Соответственно потенциальная энергия электрона в первом металле уменьшится, а во втором увеличится (напо-

мним, что потенциал металла и потенциальная энергия электрона в нем имеют разные знаки, см. рис. 9.3).

В статистической физике доказывается, что условием равновесия между соприкасающимися металлами (а также

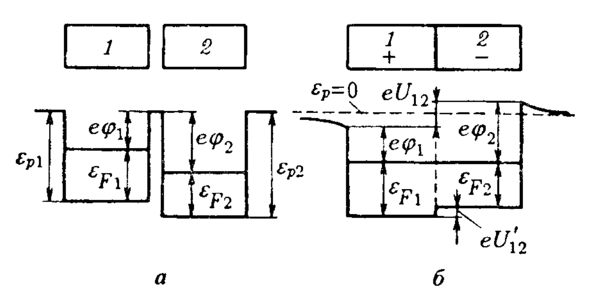



Рис. 9.15

между полупроводниками или металлом и полупроводником) является равенство полных энергий, соответствующих уровням Ферми. При этом условии уровни Ферми обоих металлов располагаются на схеме на одинаковой высоте. Из рис. 9.15 видно, что в этом случае потенциальная энергия электрона в непосредственной близости к поверхности первого металла будет на $e\varphi_2 - e\varphi_1$ меньше, чем вблизи второго металла. Следовательно, потенциал на поверхности первого металла будет на

$$U_{12} = \frac{e\varphi_2 - e\varphi_1}{e} = \varphi_2 - \varphi_1 \qquad (9.3)$$

выше, чем на поверхности второго. Величина $U_{12}$ и есть контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами.

Согласно формуле (9.3) контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами равна разности работ выхода для второго и первого металлов, деленной на элементарный заряд, или просто разности потенциалов выхода для второго и первого металлов.

Разность потенциалов (9.3) устанавливается между точками, лежащими вне металлов в непосредственной близости к их поверхности. Поэтому ее называют *внешней контактной разностью потенциалов*. Чаще же говорят просто о контактной разности потенциалов, подразумевая под ней внешнюю. Между внутренними точками металлов также имеется разность потенциалов, которая

называется внутренней. Из рис. 9.15 видно, что потенциальная энергия электрона в первом металле меньше, чем во втором, на $\varepsilon_{F1} - \varepsilon_{F2}$. Соответственно потенциал внутри первого металла выше, чем внутри второго, на величину

$$U'_{12} = \frac{\varepsilon_{F1} - \varepsilon_{F2}}{e}. \qquad (9.4)$$

Это выражение дает внутреннюю контактную разность потенциалов. На такую величину убывает потенциал при переходе из первого металла во второй.

Если придать двум разным металлам форму, показанную на рис. 9.16, и привести их в соприкосновение, то в

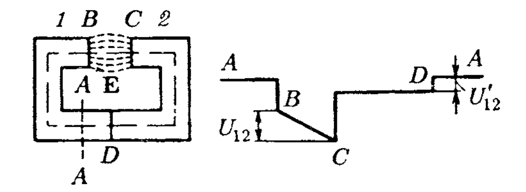



Рис. 9.16

зазоре $B$—$C$ возникает электрическое поле, линии напряженности которого показаны штрихами. Справа на рисунке изображено изменение потенциала вдоль контура, обозначенного штрихпунктирной линией.

На рис. 9.17 показано изменение потенциальной энергии электрона вдоль трех различных соприкасающихся друг с другом металлов *1*, *2*, *3*. Из рисунка видно, что устанавливающаяся между металлами *1* и *3* разность потенциалов оказывается в этом случае точно такой, как и при их непосредственном соприкосновении. То же самое справед-

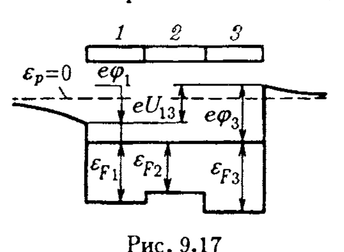



Рис. 9.17

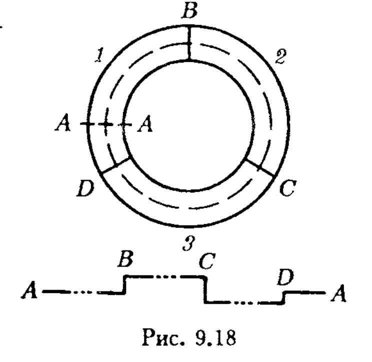



Рис. 9.18

ливо при любом числе промежуточных звеньев: разность потенциалов между концами цепи определяется разностью работ выхода для металлов, образующих крайние звенья цепи [5]).

Значения внешней контактной разности потенциалов колеблются для различных пар металлов от нескольких десятых вольта до нескольких вольт.

Мы рассмотрели контакт двух металлов. Однако контактная разность потенциалов возникает и на границе между металлом и полупроводником, а также на границе между двумя полупроводниками.

В заключение рассмотрим замкнутую цепь, составленную из произвольного числа разнородных металлов или полупроводников (рис. 9.18). Если все спаи поддерживать при одинаковой температуре, сумма скачков потенциалов будет равна нулю. Поэтому ЭДС в цепи возникнуть не может. Возникновение тока в такой цепи противоречило бы второму началу термодинамики. Действительно, так как протекание тока в металлах и полупроводниках не сопровождается химическими изменениями, ток совершал бы работу за счет теплоты, получаемой от окружающей цепь среды. Никаких побочных процессов (например, передачи части полученной теплоты другим телам) при этом не происходило бы. Следовательно, был бы осуществлен перпетуум-мобиле второго рода.

## 9.4. Термоэлектрические явления

Между тепловыми и электрическими процессами в металлах и полупроводниках имеется взаимосвязь, которая обусловливает явления, называемые термоэлектрическими. К их числу принадлежат явление Зеебека, явление Пельтье и явление Томсона.

**Явление Зеебека.** Зеебек [6]) обнаружил в 1821 г., что в случае, если спаи *1* и *2* двух разнородных металлов, образующих замкнутую цепь (рис. 9.19), имеют неодинаковую температуру, в цепи течет электрический ток. Изменение знака у разности температур спаев сопровождается изменением направления тока.

---

[5]) Значения потенциалов при этом могут измениться. В частности, может случиться, что оба крайних металла будут иметь потенциал одного знака.

[6]) Томас Иоганн Зеебек (1770–1831) — немецкий физик.

Термоэлектродвижущая сила (сокращенно термо-ЭДС) обусловлена тремя причинами: 1) зависимостью уровня Ферми от температуры, 2) диффузией электронов (или дырок) и 3) увлечением электронов фононами.

Уровень Ферми зависит от температуры (см. формулу (8.16)). Поэтому скачок потенциала при переходе из одного

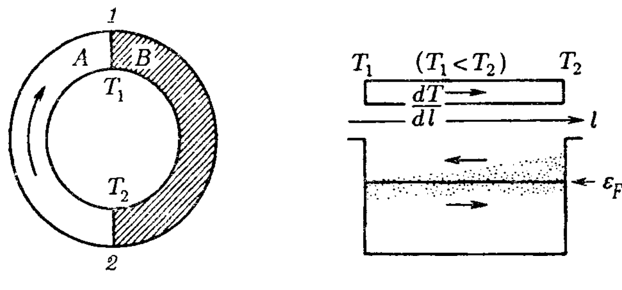



Рис. 9.19 Рис. 9.20

металла в другой (т. е. внутренняя контактная разность потенциалов; см. (9.4)) для спаев, находящихся при разных температурах, неодинаков, и сумма скачков потенциала отлична от нуля. Одного этого было бы достаточно для возникновения действующей в указанном на рис. 9.19 направлении ЭДС, равной

$$\mathcal{E}_{\text{конт}} = U'_{AB}(T_1) + U'_{BA}(T_2) =$$
$$= \frac{1}{e}\{[\varepsilon_{FA}(T_1) - \varepsilon_{FB}(T_1)] + [\varepsilon_{FB}(T_2) - \varepsilon_{FA}(T_2)]\} =$$
$$= \frac{1}{e}\{[\varepsilon_{FB}(T_2) - \varepsilon_{FB}(T_1)] - [\varepsilon_{FA}(T_2) - \varepsilon_{FA}(T_1)]\}.$$

Последнее выражение можно представить следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\text{конт}} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{e}\frac{d\varepsilon_{FB}}{dT}\,dT - \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{e}\frac{d\varepsilon_{FA}}{dT}\,dT. \qquad (9.5)$$

Чтобы понять вторую причину возникновения термо-ЭДС, рассмотрим однородный металлический проводник, вдоль которого имеется градиент температуры (рис. 9.20)

В этом случае концентрация электронов с $\varepsilon > \varepsilon_F$ у нагретого конца будет больше, чем у холодного; концентрация электронов с $\varepsilon < \varepsilon_F$ будет, наоборот, у нагретого конца меньше. Вдоль проводника возникнет градиент концентрации электронов с данным значением энергии, что повлечет за собой диффузию более быстрых электронов к холодному концу, а более медленных — к теплому. Диффузионный поток быстрых электронов будет больше, чем поток медленных электронов. Поэтому вблизи холодного конца образуется избыток электронов, а вблизи горячего — их недостаток. Это приводит к возникновению диффузионного слагаемого термо-ЭДС.

Третья причина возникновения термо-ЭДС заключается в увлечении электронов фононами. При наличии градиента температуры вдоль проводника возникает дрейф фононов. Сталкиваясь с электронами, фононы сообщают им направленное движение от более нагретого конца проводника к менее нагретому. В результате происходит накапливание электронов на холодном конце и обеднение электронами горячего конца, что приводит к возникновению «фононного» слагаемого термо-ЭДС.

Оба процесса — диффузия электронов и увлечение электронов фононами — приводят к образованию избытка электронов вблизи холодного конца проводника и недостатка их вблизи горячего конца. В результате внутри проводника возникнет электрическое поле, направленное навстречу градиенту температуры. При определенном, вообще говоря, своем для каждого сечения проводника, значении поля сумма диффузионного и фононного потоков электронов становится равной нулю, и, следовательно, устанавливается стационарное состояние. Напряженность этого поля можно представить в виде

$$E^* = -\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{d\varphi}{dT}\frac{dT}{dl} = -\beta\frac{dT}{dl}, \tag{9.6}$$

где

$$\beta = \frac{d\varphi}{dT}. \tag{9.7}$$

Соотношение (9.6) связывает напряженность $E^*$ с градиентом температуры $dT/dl$. Возникающее поле и градиент температуры имеют противоположные направления.

Поэтому $E^*$ и $dT/dl$ имеют разные знаки. Следовательно, для металлов $\beta > 0$ [7]).

Описанный процесс возникновения поля $E^*$ внутри неравномерно нагретого проводника имеет место и в полупроводниках. У полупроводников $n$-типа $\beta > 0$. В случае дырочной проводимости дырки, диффундируя в большем числе к холодному концу, создают вблизи него избыточный положительный заряд. К такому же результату приводит увлечение дырок фононами. Поэтому у полупроводников $p$-типа потенциал холодного конца будет выше, чем потенциал нагретого, и, следовательно, $\beta < 0$.

Определяемое выражением (9.6) поле является полем сторонних сил. Проинтегрировав напряженность этого поля по участку цепи $A$ от спая *2* до спая *1*, получим термо-ЭДС, действующую на этом участке [8]) в направлении, указанном стрелкой на рис. 9.19:

$$\mathcal{E}_{2A1} = -\int\limits_2^1 \beta_A \frac{dT}{dl}\, dl = \int\limits_{T_1}^{T_2} \beta_A\, dT \tag{9.8}$$

(мы поменяли местами пределы интегрирования). Аналогично термо-ЭДС, действующая на участке $B$ от спая *1* до спая *2*, равна

$$\mathcal{E}_{1B2} = -\int\limits_1^2 \beta_B \frac{dT}{dl}\, dl = \int\limits_{T_1}^{T_2} \beta_B\, dT. \tag{9.9}$$

Термоэлектродвижущая сила $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ слагается из ЭДС, возникающих в контактах, и ЭДС, действующих на участках $A$ и $B$:

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \mathcal{E}_{\text{конт}} + \mathcal{E}_{2A1} + \mathcal{E}_{1B2}.$$

Подставив выражения (9.5), (9.8) и (9.9) и произведя несложные преобразования, получим

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\beta_A - \frac{1}{e}\frac{d\varepsilon_{FA}}{dT}\right) dT - \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\beta_B - \frac{1}{e}\frac{d\varepsilon_{FB}}{dT}\right) dT.$$

---

[7]) Это справедливо для подавляющего большинства металлов. Однако у некоторых металлов (бериллия, цинка и др.) проводимость имеет дырочный характер. Знак холловской разности потенциалов для этих металлов соответствует положительным носителям тока. У таких металлов $\beta < 0$.

[8]) См. формулу (5.15) кн. 2.

Величина

$$\alpha = \beta - \frac{1}{e}\frac{d\varepsilon_F}{dT} \tag{9.10}$$

называется коэффициентом термоэлектродвижущей силы. Поскольку и $\beta$, и $d\varepsilon_F/dT$ зависят от температуры, коэффициент $\alpha$ является функцией $T$.

Приняв во внимание (9.10), выражение для термо-ЭДС можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \alpha_A \, dT - \int\limits_{T_1}^{T_2} \alpha_B \, dT \tag{9.11}$$

или

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \alpha_{AB} \, dT, \tag{9.12}$$

где

$$\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B. \tag{9.13}$$

Величину (9.13) называют дифференциальной или удельной термоэлектродвижущей силой данной пары металлов или полупроводников. Для большинства пар металлов $\alpha_{AB}$ имеет порядок $10^{-5}$–$10^{-4}$ В/К; для полупроводников она может оказаться гораздо больше (до $1,5 \cdot 10^{-3}$ В/К). Это объясняется тем, что у полупроводников с разным типом проводимости $\alpha$ имеет разные знаки, вследствие чего $|\alpha_{AB}| = |\alpha_A| + |\alpha_B|$.

В отдельных случаях удельная термо-ЭДС слабо зависит от температуры. Тогда формулу (9.12) можно приближенно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha_{AB}(T_2 - T_1). \tag{9.14}$$

Однако, как правило, с увеличением разности температур спаев $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ изменяется не по линейному закону, а довольно сложным образом, вплоть до того, что может менять знак. Так, например, если один спай пары железо–медь поддерживать при 0 °С, то при температуре второго спая, равной примерно 540 °С, термо-ЭДС обращается в нуль; при более низкой температуре спая $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ имеет один знак, при более высокой — другой.

Явление Зеебека используется для измерения температур. Соответствующее устройство называется термопа-

рой. Один спай термопары поддерживают при постоянной температуре (например, при 0 °C), другой помещают в ту среду, температуру которой хотят измерить. О величине температуры можно судить по силе возникающего термотока, измеряемой гальванометром. Более точный результат получается, если измерять возникающую термо-ЭДС по методу компенсации. Предварительно термопару градуируют. С помощью термопар можно измерять с точностью порядка сотых долей кельвина как низкие, так и высокие температуры.

В качестве источников тока термопары из металлов и их сплавов не используются вследствие весьма низкого КПД (не более 0,5 %). Термопары из полупроводниковых материалов обладают гораздо большим КПД (порядка 10 %). Они уже нашли применение в качестве небольших генераторов для питания радиоаппаратуры. Разрабатываются генераторы мощностью в сотни киловатт.

**Явление Пельтье.** Это явление, открытое Пельтье[9]) в 1834 г., заключается в том, что при протекании тока через цепь, составленную из разнородных металлов или полупроводников, в одних спаях происходит выделение, а в других — поглощение теплоты. Таким образом, явление Пельтье оказывается обратным явлению Зеебека.

Опытным путем установлено, что количество выделившейся или поглотившейся в спае теплоты пропорционально заряду $q$, прошедшему через спай:

$$Q_{AB} = \Pi_{AB} q = \Pi_{AB} I t \tag{9.15}$$

(индексы указывают, что ток течет от звена $A$ к звену $B$). Коэффициент пропорциональности $\Pi_{AB}$ называется коэффициентом Пельтье.

Из (9.15) следует, что, в отличие от теплоты Джоуля–Ленца, теплота Пельтье пропорциональна не квадрату, а первой степени силы тока.

При перемене направления тока $Q$ изменяет знак, т. е. вместо выделения (поглощения) теплоты наблюдается поглощение (выделение) такого же количества теплоты (при том же $q$). Следовательно,

$$\Pi_{AB} = -\Pi_{BA}.$$

[9]) Жан Шарль Атаназ Пельтье (1785–1845) — французский физик.

Из законов термодинамики вытекает, что коэффициент Пельтье и удельная термоэлектродвижущая сила связаны соотношением

$$\Pi_{AB} = \alpha_{AB} T. \tag{9.16}$$

В случае контакта двух веществ с одинаковым видом носителей тока (металл–металл, металл–полупроводник $n$-типа, два полупроводника $n$-типа, два полупроводника $p$-типа) эффект Пельтье имеет следующее объяснение. Носители тока (электроны или дырки) по разные стороны от спая имеют различную среднюю энергию (имеется в виду полная энергия — кинетическая плюс потенциальная). Если носители, пройдя через спай, попадают в область с меньшей энергией, они отдают избыток энергии кристаллической решетке, в результате чего спай нагревается. На другом спае носители переходят в область с большей энергией; недостающую энергию они заимствуют у решетки, что приводит к охлаждению спая.

В случае контакта двух полупроводников с различным типом проводимости эффект Пельтье имеет другое объяснение. В этом случае на одном спае электроны и дырки движутся навстречу друг другу. Встретившись, они рекомбинируют: электрон, находившийся в зоне проводимости $n$-полупроводника, попав в $p$-полупроводник, занимает в валентной зоне место дырки. При этом высвобождается энергия, которая требуется для образования свободного электрона в $n$-полупроводнике и дырки в $p$-полупроводнике, а также кинетическая энергия электрона и дырки. Эта энергия сообщается кристаллической решетке и идет на нагревание спая. На другом спае протекающий ток отсасывает электроны и дырки от границы между полупроводниками. Убыль носителей тока в пограничной области восполняется за счет попарного рождения электронов и дырок (при этом электрон из валентной зоны $p$-полупроводника переходит в зону проводимости $n$-полупроводника). На образование пары затрачивается энергия, которая заимствуется у решетки, — спай охлаждается.

**Явление Томсона.** В 1856 г. У. Томсон (впоследствии лорд Кельвин) предсказал на основании термодинамических соображений, что теплота, аналогичная теплоте Пельтье, должна выделяться (или поглощаться) при прохождении тока по однородному проводнику, вдоль которого имеется градиент температуры. Этот эффект был впослед-

ствии обнаружен экспериментально и получил название явления Томсона.

Количество теплоты, выделяющейся вследствие явления Томсона в единицу времени в элементе проводника длины $dl$, равно

$$dQ = \tau I \frac{dT}{dl}\, dl. \qquad (9.17)$$

Здесь $I$ — сила тока, $dT/dl$ — градиент температуры, $\tau$ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Томсона.

Явление Томсона объясняется по аналогии с явлением Пельтье. Пусть ток течет в направлении возрастания температуры. Если носители тока — электроны, они при своем движении будут переходить из мест с более высокой температурой (и, следовательно, большей средней энергией электронов) в места с более низкой температурой (и меньшей средней энергией). Избыток своей энергии электроны отдадут решетке, что приведет к выделению тепла. Если носителями тока служат дырки, эффект будет иметь обратный знак.

## 9.5. Полупроводниковые диоды и триоды

Выпрямление токов, а также усиление напряжений и мощностей можно осуществить с помощью полупроводниковых устройств, называемых полупроводниковыми (или кристаллическими) диодами и триодами. Полупроводниковые триоды называют также транзисторами.

Основным элементом полупроводниковых приборов является так называемый $p$–$n$-переход. Он представляет собой тонкий слой на границе между двумя областями одного и того же кристалла, отличающимися типом примесной проводимости. Для изготовления такого перехода берут, например, монокристалл из очень чистого германия с электронным механизмом проводимости (обусловленным ничтожными остатками примесей). В вырезанную из кристалла тонкую пластинку вплавляют с одной стороны кусочек индия. Во время этой операции, которая осуществляется в вакууме или в атмосфере инертного газа, атомы индия диффундируют в германий на некоторую глубину. В той области, в которую проникают атомы индия, проводимость германия становится дырочной. На

границе этой области возникает $p$–$n$-переход. Существуют и другие способы получения $p$–$n$-переходов.

На рис. 9.21 показан ход концентрации примесей в направлении, перпендикулярном к граничному слою. В $p$-об-

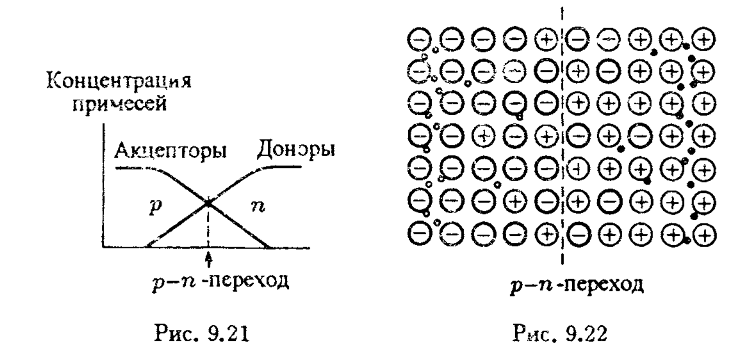



Рис. 9.21 Рис. 9.22

ласти основными носителями тока являются дырки, образовавшиеся в результате захвата электронов атомами примеси; акцепторы при этом становятся отрицательными ионами (рис. 9.22; большие кружки со знаком плюс или минус внутри — ионы, малые кружки — дырки, черные точки — электроны). Кроме того, в $p$-области имеется небольшое число неосновных носителей — электронов, возникающих вследствие перевода тепловым движением электронов из валентной зоны непосредственно в зону проводимости (этот процесс немного увеличивает и число дырок). В $n$-области основные носители тока — электроны, отданные донорами в зону проводимости (доноры при этом превращаются в положительные ионы); происходящий за счет теплового движения переход электронов из валентной зоны в зону проводимости приводит к образованию небольшого числа дырок — неосновных носителей для этой области.

Диффундируя во встречных направлениях через пограничный слой, дырки и электроны рекомбинируют друг с другом. Поэтому $p$–$n$-переход оказывается сильно обедненным носителями тока и приобретает большое сопротивление. Одновременно на границе между областями возникает двойной электрический слой, образованный отрицательными ионами акцепторной примеси, заряд которых теперь не компенсируется дырками, и положительными ионами донорной примеси, заряд которых теперь не ком-

пенсируется электронами (см. рис. 9 22). Электрическое поле в этом слое направлено так, что противодействует дальнейшему переходу через слой основных носителей.

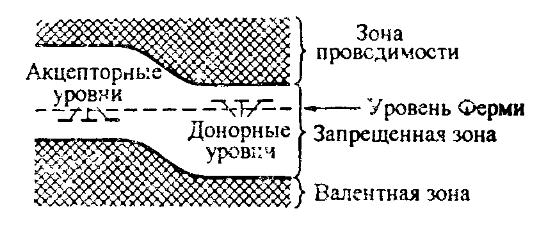



Рис. 9.23

Равновесие достигается при такой высоте потенциального барьера, при которой уровни Ферми обеих областей располагаются на одинаковой высоте (рис. 9.23).

Изгибание энергетических зон в области перехода вызвано тем, что потенциал $p$-области в состоянии равновесия ниже, чем потенциал $n$-области; соответственно потенциальная энергия электрона в $p$-области больше, чем в $n$-области. Нижняя граница валентной зоны дает ход потенциальной энергии электрона $\varepsilon_{рэ}$ в направлении, перпендикулярном к переходу (см. сплошную кривую на рис. 9.24 *а*). Заряд дырок противоположен заряду элек-

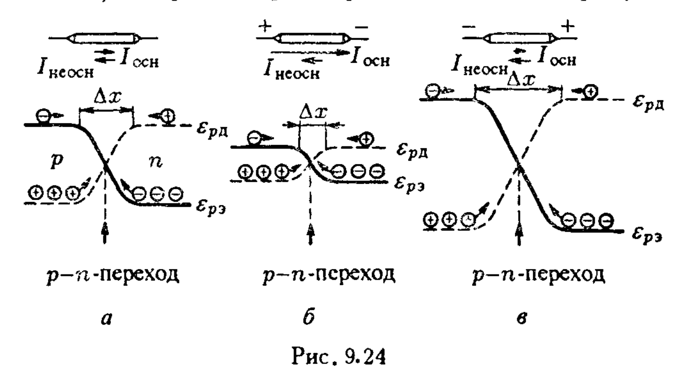



Рис. 9.24

трона, поэтому их потенциальная энергия $\varepsilon_{рд}$ больше там, где меньше $\varepsilon_{рэ}$, и наоборот (см. штриховую кривую рис. 9.24 *а*).

В состоянии равновесия некоторому количеству основных носителей удается преодолеть потенциальный барьер,

вследствие чего через переход течет небольшой ток $I_{осн}$ (рис. 9.24 *а*). Этот ток компенсируется обусловленным неосновными носителями встречным током $I_{неосн}$. Неосновных носителей очень мало, но они легко проникают через границу областей, «скатываясь» с потенциального барьера. Величина $I_{неосн}$ определяется числом рождающихся ежесекундно неосновных носителей и от высоты потенциального барьера почти не зависит. Величина $I_{осн}$, напротив, сильно зависит от высоты барьера. Равновесие устанавливается как раз при такой высоте потенциального барьера, при которой оба тока $I_{осн}$ и $I_{неосн}$ компенсируют друг друга.

Подадим на кристалл внешнее напряжение[10]) такого направления, чтобы плюс был подключен к $p$-области, а минус — к $n$-области (такое напряжение называется прямым). Это приведет к возрастанию потенциала (т. е. увеличению $\varepsilon_{pд}$ и уменьшению $\varepsilon_{pэ}$) $p$-области и понижению потенциала (т. е. уменьшению $\varepsilon_{pд}$ и увеличению $\varepsilon_{pэ}$) $n$-области (рис. 9.24 *б*). В результате высота потенциального барьера уменьшится и ток $I_{осн}$ возрастет. Ток же $I_{неосн}$ останется практически без изменений (он, как отмечалось, от высоты барьера почти не зависит). Следовательно, результирующий ток станет отличен от нуля. Понижение потенциального барьера пропорционально приложенному напряжению (оно равно $eU$). При уменьшении высоты барьера ток основных носителей, а следовательно, и результирующий ток, быстро нарастает.

Таким образом, в направлении от $p$-области к $n$-области $p$–$n$-переход пропускает ток, сила которого быстро нарастает при увеличении приложенного напряжения. Это направление называется прямым (или пропускным, или проходным).

На рис. 9.25 представлена вольт-амперная характеристика $p$–$n$-перехода. Возникающее в кристалле при прямом напряжении электрическое поле «поджимает» основные носители к границе между областями, вследствие чего ширина переходного слоя, обедненного носителями, сокращается. Соответственно уменьшается и сопротивление перехода, причем тем сильнее, чем больше напряже-

---

[10]) Внешнее напряжение нарушает равновесие, так что уровни Ферми обеих областей смещаются относительно друг друга. При прямом напряжении уровень Ферми в $p$-области располагается ниже, чем в $n$-области.

ние. Поэтому вольт-амперная характеристика в пропускной области не является прямой (см. правую ветвь кривой на рис. 9.25).

Теперь приложим к кристаллу напряжение такого направления, чтобы плюс был подключен к $n$-области, а минус — к $p$-области (такое напряжение называется обратным). Это приведет к повышению потенциального барьера

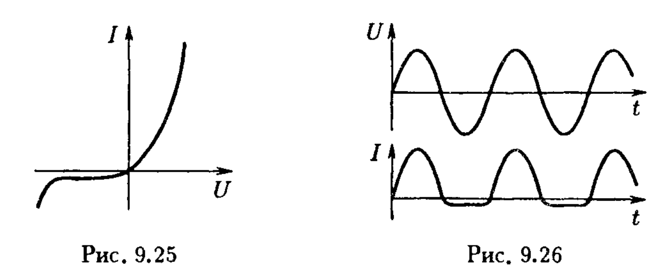



Рис. 9.25 Рис. 9.26

и соответственному уменьшению тока основных носителей $I_{осн}$ (рис. 9.24 *в*). Возникающий при этом результирующий ток (называемый обратным) быстро достигает насыщения (т. е. перестает зависеть от $U$) и становится равным $I_{неосн}$. Таким образом, в направлении от $n$-области к $p$-области (которое называется обратным или запорным) $p$–$n$-переход пропускает слабый ток, целиком обусловленный неосновными носителями. Лишь при очень большом обратном напряжении сила тока начинает резко возрастать, что обусловлено электрическим пробоем перехода (см. левую ветвь на рис. 9.25). Каждый $p$–$n$-переход характеризуется своим предельным значением обратного напряжения, которое он способен выдержать без разрушения.

Из рис. 9.25 следует, что $p$–$n$-переход обладает в обратном направлении гораздо бо́льшим сопротивлением, чем в прямом. Это объясняется тем, что поле, возникающее в кристалле при наложении обратного напряжения, «оттягивает» основные носители от границы между областями, что приводит к возрастанию ширины переходного слоя, обедненного носителями. Соответственно увеличивается и сопротивление перехода.

Неодинаковость сопротивления в прямом и обратном направлениях позволяет использовать $p$–$n$-переходы для выпрямления переменного тока. На рис. 9.26 показан график тока, текущего через переход, в том случае, если при-

ложенное напряжение изменяется по гармоническому закону. В этом случае ширина слоя, обедненного носителями, и сопротивление перехода пульсируют, изменяясь в такт с изменениями напряжения.

Полупроводниковый триод, или **транзистор**, представляет собой кристалл с двумя *p*–*n*-переходами. В зависимости от порядка, в котором чередуются области с разной проводимостью различают *n*–*p*–*n*- и *p*–*n*–*p*-транзисторы. Средняя часть транзистора называется его **базой**. Прилегающие к базе с обеих сторон области с иным, чем у нее, типом проводимости образуют **эмиттер** и **коллектор**.

Рассмотрим кратко принцип работы транзистора типа *n*–*p*–*n*. На рис. 9.27 показана схема включения такого

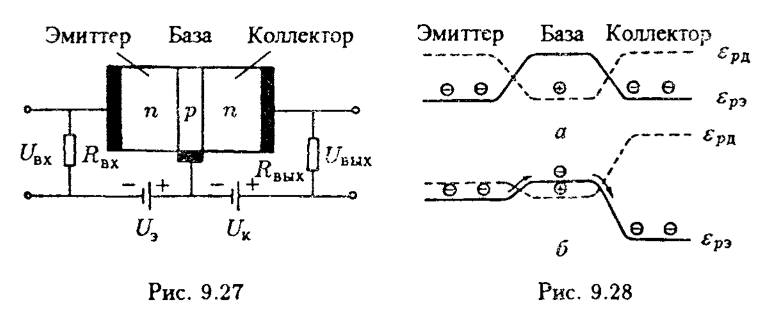



Рис. 9.27 Рис. 9.28

транзистора в цепь усилителя. На переход эмиттер–база подается постоянное смещающее напряжение $U_э$ в прямом направлении, а на переход база–коллектор — постоянное смещающее напряжение $U_к$ в обратном направлении. Усиливаемое переменное напряжение $U_{вх}$ подается на небольшое входное сопротивление $R_{вх}$. Усиленное напряжение $U_{вых}$ снимается с выходного сопротивления $R_{вых}$. При указанных на схеме знаках смещающих напряжений сопротивление перехода эмиттер–база невелико, сопротивление же перехода база–коллектор, напротив, очень велико. Это позволяет взять в качестве $R_{вых}$ сопротивление большой величины.

На рис. 9.28 *а* показан ход потенциальной энергии электронов (сплошная кривая) и дырок (штриховая кривая) в случае, когда смещающие напряжения и входной сигнал отсутствуют. Подключение прямого напряжения $U_э$ понижает потенциальный барьер на первом переходе, а подключение обратного напряжения $U_к$ повышает потенциальный барьер на втором переходе (рис. 9.28 *б*). Проте-

кание тока в цепи эмиттера сопровождается проникновением электронов в область базы. Проникшие в базу электроны диффундируют по направлению к коллектору. Если толщина базы небольшая, почти все электроны, не успев рекомбинировать, «скатываются» с потенциальной горки, находящейся на границе база—коллектор, и поступают в цепь коллектора.

Обусловленное входным напряжением изменение тока $I_э$ в цепи эмиттера приводит к изменению количества электронов, проникающих в коллектор, и, следовательно, к почти такому же изменению тока $I_к$ в цепи коллектора. Допустим, что $I_к \approx I_э$. Выразив эти токи через соответствующие напряжения и сопротивления, получим, что $U_{вх}/R_{вх} \approx U_{вых}/R_{вых}$. Отсюда

$$U_{вых} : U_{вх} \approx R_{вых} : R_{вх}.$$

Поскольку $R_{вых} \gg R_{вх}$, напряжение $U_{вых}$ значительно превосходит входное напряжение $U_{вх}$. Таким образом, транзистор усиливает напряжения и мощности. Снимаемая с прибора повышенная мощность появляется за счет источника тока, включенного в цепь коллектора.

Принцип работы транзистора типа *p–n–p* аналогичен описанному выше принципу работы транзистора типа *n–p–n*. Отличие заключается лишь в том, что роль электронов здесь играют дырки.

## 9.6. Внутренний фотоэффект

Кроме рассмотренного в § 2.2 внешнего фотоэффекта (называемого обычно просто фотоэффектом), существует также внутренний фотоэффект, наблюдаемый в диэлектриках и полупроводниках. Он заключается в обусловленном действием света перераспределении электронов по энергетическим уровням. Если энергия кванта $\hbar\omega$ превышает ширину запрещенной зоны, поглотивший квант электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости. В результате появляется дополнительная пара носителей тока — электрон и дырка, что проявляется в увеличении электропроводности вещества. Если в веществе имеются примеси, под действием света электроны могут переходить из валентной зоны на уровни примеси или с примесных уровней в зону проводимости. В первом случае возникает дырочная, во втором — электронная проводимость.

На внутреннем фотоэффекте основано действие фотосопротивлений. Количество образующихся носителей тока пропорционально падающему световому потоку. Поэтому фотосопротивления применяются для целей фотометрии. В видимой части спектра применяются фотосопротивления, изготовленные из сернистого кадмия CdS. Фотосопротивления из полупроводников PbS, PbSe, PbTe и InSb используются в качестве детекторов инфракрасного излучения.

В области $p$–$n$-перехода или на границе металла с полупроводником может наблюдаться вентильный фотоэффект. Он заключается в возникновении под действием света электродвижущей силы (фото-ЭДС). На рис. 9.29 показан ход потенциальной энергии электронов (сплошная кривая) и дырок (штриховая кривая) в области $p$–$n$-перехода. Неосновные для данной области носители (электроны в $p$-области и дырки в $n$-области), возникшие под действием света, беспрепятственно проходят через переход. В результате в $p$-области накапливается избыточный положительный заряд, а в $n$-области — избыточный отрицательный заряд. Это приводит к возникновению приложенного к переходу напряжения, которое и представляет собой фотоэлектродвижущую силу.

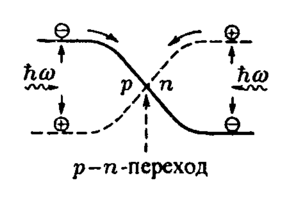



Рис. 9.29

Если подключить кристалл с $p$–$n$-переходом к внешней нагрузке, в ней будет течь фототок. При не очень больших освещенностях сила этого тока пропорциональна падающему на кристалл световому потоку. На этом основано действие фотоэлектрических фотометров, в частности, применяемых в фотографии экспонометров. Несколько десятков соединенных последовательно кремниевых $p$–$n$-переходов образуют солнечную батарею. Такие батареи применяются для питания радиоаппаратуры на космических ракетах и спутниках Земли.

# Часть IV
# Физика атомного ядра и элементарных частиц

## Глава 10
## Атомное ядро

### 10.1. Состав и характеристики атомного ядра

Ядро простейшего атома — атома водорода — состоит из одной элементарной частицы, называемой *протоном*. Ядра всех остальных атомов состоят из двух видов частиц — *протонов* и *нейтронов*. Эти частицы носят название *нуклонов*. Протонно-нейтронная модель ядра была предложена в 1932 г. одновременно и независимо Иваненко [1]) и Гейзенбергом.

**Протон.** Протон ($p$) обладает зарядом $+e$ и массой

$$m_p = 938,28 \text{ МэВ}^{2)}. \tag{10.1}$$

Для сравнения укажем, что масса электрона равна

$$m_e = 0,511 \text{ МэВ}. \tag{10.2}$$

Из сопоставления (10.1) и (10.2) следует, что

$$m_p = 1836 m_e.$$

Протон имеет спин, равный половине ($s = 1/2$), и собственный магнитный момент

$$\mu_p = +2,79\mu_я, \tag{10.3}$$

где

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5,05 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс} \tag{10.4}$$

— единица магнитного момента, называемая *ядерным магнетоном*. Из сравнения с (5.42) вытекает, что $\mu_я$ в 1836 раз меньше магнетона Бора $\mu_Б$. Следовательно, собственный магнитный момент протона примерно в 660 раз меньше, чем магнитный момент электрона.

---

[1]) Дмитрий Дмитриевич Иваненко (р. в 1904 г.) — советский физик.

[2]) В ядерной физике принято выражать массы в единицах энергии, умножая их для этой цели на $c^2$. Применяется также единица массы, называемая *атомной единицей массы* (см. § 1.2 кн. 3), 1 а.е.м. = 931,49 МэВ.

**Нейтрон.** Нейтрон ($n$) был открыт в 1932 г. Чедвиком[3]). Электрический заряд нейтрона равен нулю, а масса

$$m_n = 939,57 \text{ МэВ} \tag{10.5}$$

очень близка к массе протона. Разность масс нейтрона и протона $m_n - m_p$ составляет 1,3 МэВ, т. е. 2,5$m_e$.

Нейтрон обладает спином, равным половине ($s = 1/2$), и (несмотря на отсутствие электрического заряда) собственным магнитным моментом

$$\mu_n = -1,91\mu_я \tag{10.6}$$

(знак минус указывает на то, что направления собственных механического и магнитного моментов противоположны). Объяснение этого удивительного факта будет дано в § 10.4. Отметим, что отношение экспериментальных значений $\mu_p$ и $\mu_n$ с большой степенью точности равно $-3/2$. Это было замечено лишь после того, как такое значение было получено теоретически.

В свободном состоянии нейтрон нестабилен (радиоактивен) — он самопроизвольно распадается, превращаясь в протон и испуская электрон ($e^-$) и еще одну частицу, называемую антинейтрино ($\tilde{\nu}$) (см. § 11.8). Период полураспада (т. е. время, за которое распадается половина первоначального количества нейтронов) равен примерно 12 мин. Схему распада можно написать следующим образом:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}. \tag{10.7}$$

Масса антинейтрино равна нулю[4]). Масса нейтрона больше массы протона на 2,5$m_e$. Следовательно, масса нейтрона превышает суммарную массу частиц, фигурирующих в правой части уравнения (10.7), на 1,5$m_e$, т. е. на 0,77 МэВ. Эта энергия выделяется при распаде нейтрона в виде кинетической энергии образующихся частиц.

**Характеристики атомного ядра.** Одной из важнейших характеристик атомного ядра является зарядовое число $Z$. Оно равно количеству протонов, входящих в состав ядра, и определяет его заряд, который равен $+Ze$.

[3]) Джеймс Чедвик (1891–1974) — английский физик.

[4]) Во всяком случае пренебрежимо мала по сравнению с массами электрона, протона и нейтрона.

Число $Z$ определяет порядковый номер химического элемента в периодической таблице Менделеева. Поэтому его также называют *атомным номером* ядра.

Число нуклонов (т. е. суммарное число протонов и нейтронов) в ядре обозначается буквой $A$ и называется *массовым числом* ядра. Число нейтронов в ядре равно $N = A - Z$.

Для обозначения ядер применяется символ

$$^A_Z\mathrm{X},$$

где под X подразумевается химический символ данного элемента. Слева вверху ставится массовое число, слева внизу — атомный номер (последний значок часто опускают). Иногда массовое число пишут не слева, а справа от символа химического элемента ($_Z\mathrm{X}^A$).

Ядра с одинаковым $Z$, но разными $A$ называются *изотопами*. Большинство химических элементов имеет по нескольку стабильных изотопов. Так, например, у кислорода имеется три стабильных изотопа: $^{16}_8\mathrm{O}$, $^{17}_8\mathrm{O}$, $^{18}_8\mathrm{O}$, у олова — десять и т. д.

Водород имеет три изотопа:

$^1_1\mathrm{H}$ — обычный водород, или протий ($Z = 1$, $N = 0$),

$^2_1\mathrm{H}$ — тяжелый водород, или дейтерий ($Z = 1$, $N = 1$),

$^3_1\mathrm{H}$ — тритий ($Z = 1$, $N = 2$)[5].

Протий и дейтерий стабильны, тритий радиоактивен.

Ядра с одинаковым массовым числом $A$ называются *изобарами*. В качестве примера можно привести $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$ и $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$. Ядра с одинаковым числом нейтронов $N = A - Z$ носят название *изотонов* ($^{13}_6\mathrm{C}$, $^{14}_7\mathrm{N}$). Наконец, существуют радиоактивные ядра с одинаковыми $Z$ и $A$, различающиеся периодом полураспада. Они называются *изомерами*. Например, имеются два изомера ядра $^{80}_{35}\mathrm{Br}$; у одного из них период полураспада равен 18 мин, у другого — 4,4 ч.

Известно около 1500 ядер, различающихся либо $Z$, либо $A$, либо тем и другим. Примерно 1/5 часть этих ядер устойчивы, остальные радиоактивны. Многие ядра были получены искусственным путем с помощью ядерных реакций.

---

[5]) Дейтерий обозначают также символом D, а тритий — символом T.

В природе встречаются элементы с атомным номером $Z$ от 1 до 92, исключая технеций (Tc, $Z = 43$) и прометий (Pm, $Z = 61$). Плутоний (Pu, $Z = 94$) после получения его искусственным путем был обнаружен в ничтожных количествах в природном минерале — смоляной обманке. Остальные трансурановые (т. е. зaурановые) элементы (с $Z$ от 93 до 107) были получены искусственным путем посредством различных ядерных реакций.

Трансурановые элементы кюрий (96 Cm), эйнштейний (99 Es), фермий (100 Fm) и менделевий (101 Md) получили названия в честь выдающихся ученых П. и М. Кюри, А. Эйнштейна, Э. Ферми и Д.И. Менделеева. Лоуренсий (103 Lw) назван в честь изобретателя циклотрона Э. Лоуренса. Курчатовий (104 Ku) получил свое название в честь выдающегося советского физика И.В. Курчатова.

Некоторые трансурановые элементы, в том числе курчатовий и элементы с номерами 106 и 107, были получены в Лаборатории ядерных реакций Объединенного института ядерных исследований в Дубне (под Москвой) Флёровым [6]) и его сотрудниками.

**Размеры ядер.** В первом приближении ядро можно считать шаром, радиус которого довольно точно определяется формулой

$$r = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}\ \text{см} = 1,3 A^{1/3}\ \text{ферми} \qquad (10.8)$$

(ферми — название применяемой в ядерной физике единицы длины, равной $10^{-13}$ см). Из формулы (10.8) следует, что обьем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Таким образом, плотность вещества во всех ядрах примерно одинакова.

**Спин ядра.** Спины нуклонов складываются в результирующий спин ядра. Спин нуклона равен 1/2. Поэтому квантовое число спина ядра $I$ будет полуцелым при нечетном числе нуклонов $A$ и целым или нулем при четном $A$. Спины ядер $I$ не превышают нескольких единиц. Это указывает на то, что спины большинства нуклонов в ядре взаимно компенсируют друг друга, располагаясь антипараллельно. У всех четно-четных ядер (т. е. ядер с четным числом протонов и четным числом нейтронов) спин равен нулю.

---

[6]) Георгий Николаевич Флёров (1913-1990) — советский физик.

Механический момент ядра $\mathbf{M}_I$ складывается с моментом электронной оболочки $\mathbf{M}_J$ в полный момент импульса атома $\mathbf{M}_F$, который определяется квантовым числом $F$.

Взаимодействие магнитных моментов электронов и ядра приводит к тому, что состояния атома, соответствующие различным взаимным ориентациям $\mathbf{M}_I$ и $\mathbf{M}_J$ (т. е. различным $F$), имеют немного различающуюся энергию. Взаимодействием моментов $\mu_L$ и $\mu_S$ обусловливается тонкая структура спектров (см. § 5.4). Взаимодействием $\mu_I$ и $\mu_J$ определяется сверхтонкая структура атомных спектров. Расщепление спектральных линий, соответствующее сверхтонкой структуре, настолько мало (порядка нескольких сотых ангстрема), что может наблюдаться лишь с помощью приборов самой высокой разрешающей силы.

## 10.2. Масса и энергия связи ядра

Масса ядра $m_я$ всегда меньше суммы масс входящих в него частиц. Это обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи нуклонов друг с другом.

Энергия покоя частицы связана с ее массой соотношением $E_0 = mc^2$ (см. формулу (6.55) кн. 1). Следовательно, энергия покоящегося ядра меньше суммарной энергии невзаимодействующих покоящихся нуклонов на величину

$$E_{св} = c^2\{[Zm_p + (A - Z)m_n] - m_я\}. \tag{10.9}$$

Эта величина и есть энергия связи нуклонов в ядре. Она равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны и удалить их друг от друга на такие расстояния, при которых они практически не взаимодействуют друг с другом.

Соотношение (10.9) практически не нарушится, если заменить массу протона $m_p$ массой атома водорода $m_H$, а массу ядра $m_я$ — массой атома $m_a$. Действительно, если пренебречь сравнительно ничтожной энергией связи электронов с ядрами, указанная замена будет означать добавление к уменьшаемому и вычитаемому выражения, стоящего в фигурных скобках, одинаковой величины, равной $Zm_e$. Итак, формуле (10.9) можно придать вид

$$E_{св} = c^2\{[Zm_H + (A - Z)m_n] - m_a\}. \tag{10.10}$$

Последняя формула удобнее, чем (10.9), потому что в таблицах обычно даются не массы ядер, а массы атомов.

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, т. е. $E_{св}/A$, называется *удельной энергией связи нуклонов в ядре*.

Величина

$$\Delta = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_я \qquad (10.11)$$

называется *дефектом массы ядра*[7]. Дефект массы связан с энергией связи соотношением $\Delta = E_{св}/c^2$.

Вычислим энергию связи нуклонов в ядре ${}^4_2He$, в состав которого входят два протона ($Z = 2$) и два нейтрона ($A - Z = 2$). Масса атома ${}^4_2He$ равна 4,00260 а.е.м., чему соответствует 3728,0 МэВ. Масса атома водорода ${}^1_1H$ равна 1,00815 а.е.м. (938,7 МэВ; ср. с (10.1)). Масса нейтрона равна значению (10.5). Подставив эти величины в формулу (10.10), получим

$$E_{св} = (2 \cdot 938,7 + 2 \cdot 939,5) - 3728,0 = 28,4 \text{ МэВ}.$$

В расчете на один нуклон энергия связи ядра гелия составляет 7,1 МэВ. Для сравнения укажем, что энергия связи валентных электронов в атомах имеет величину, в $10^6$ раз меньшую (порядка 10 эВ). Для других ядер удельная энергия связи, т. е. энергия связи, приходящаяся на один нуклон ($E_{св}/A$), имеет примерно такую же величину, как у гелия.

На рис. 10.1 изображен график, показывающий зависимость удельной энергии связи $E_{св}/A$ от массового числа $A$. Сильнее всего связаны нуклоны в ядрах с массовыми числами порядка 50–60 (т. е. для элементов от Cr до Zn). Энергия связи для этих ядер достигает 8,7 МэВ/нуклон. С ростом $A$ удельная энергия связи постепенно уменьшается; для самого тяжелого природного элемента — урана — она составляет 7,5 МэВ/нуклон. Такая зависимость удельной энергии связи от массового числа делает энергетически возможными два процесса: 1) деление тяжелых ядер на несколько более легких ядер и 2) слияние (*синтез*) легких ядер в одно ядро. Оба процесса должны сопровождаться выделением большого количества энергии.

---

[7]) Первоначально дефектом массы была названа разность между числовым значением массы атома $m_a$, выраженной в атомных единицах массы, и массовым числом $A$: $\Delta = m_a - A$. Эта величина имеет менее ясный физический смысл, чем (10.11).

Так, например, деление одного ядра с массовым числом $A = 240$ (удельная энергия связи равна 7,5 МэВ) на два ядра с массовыми числами $A = 120$ (удельная энергия

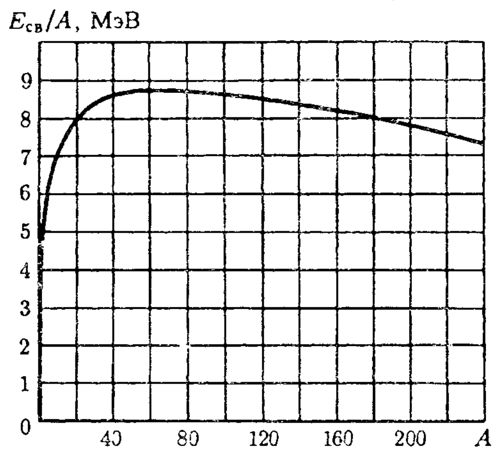



Рис. 10.1

связи равна 8,5 МэВ) привело бы к высвобождению энергии 240 МэВ. Слияние двух ядер тяжелого водорода $^2_1$H в ядро гелия $^4_2$He привело бы к выделению энергии, равной 24 МэВ. Для сравнения укажем, что при соединении одного атома углерода с двумя атомами кислорода (сгорание угля до $CO_2$) выделяется энергия порядка 5 эВ.

Ядра со значениями массового числа $A$ от 50 до 60 являются энергетически наиболее выгодными. В связи с этим возникает вопрос: почему ядра с иными значениями $A$ оказываются стабильными? Ответ заключается в следующем. Для того чтобы разделиться на несколько частей, тяжелое ядро должно пройти через ряд промежуточных состояний, энергия которых превышает энергию основного состояния ядра. Следовательно, для процесса деления ядру требуется дополнительная энергия (*энергия активации*), которая затем возвращается обратно, приплюсовываясь к энергии, выделяющейся при делении за счет изменения энергии связи. В обычных условиях ядру неоткуда взять энергию активации, вследствие чего тяжелые ядра не претерпевают спонтанного деления. Энергия активации может быть сообщена тяжелому ядру захваченным им дополнительным нейтроном. Процесс деления

ядер урана или плутония под действием захватываемых ядрами нейтронов лежит в основе действия ядерных реакторов и обычной атомной бомбы.

Что касается легких ядер, то для слияния их в одно ядро они должны подойти друг к другу на весьма близкое расстояние ($10^{-13}$ см). Такому сближению ядер препятствует кулоновское отталкивание между ними. Для того чтобы преодолеть это отталкивание, ядра должны двигаться с огромными скоростями, соответствующими температурам порядка нескольких сот миллионов кельвин. По этой причине процесс синтеза легких ядер называется термоядерной реакцией. Термоядерные реакции протекают в недрах Солнца и звезд. В земных условиях пока были осуществлены неуправляемые термоядерные реакции при взрывах водородных бомб. Ученые ряда стран настойчиво работают над изысканием способов осуществления управляемого термоядерного синтеза. Советские физики занимают в этой области одно из ведущих мест.

## 10.3. Модели атомного ядра

Попытки построения теории ядра наталкиваются на две серьезные трудности: 1) недостаточность знаний о силах, действующих между нуклонами, 2) чрезвычайную громоздкость квантовой задачи многих тел (ядро с массовым числом $A$ представляет собой систему из $A$ тел). Эти трудности вынуждают идти по пути создания ядерных моделей, позволяющих описывать с помощью сравнительно простых математических средств определенную совокупность свойств ядра. Ни одна из подобных моделей не может дать исчерпывающего описания ядра. Поэтому приходится пользоваться несколькими моделями, каждая из которых описывает свою совокупность свойств ядра и свой круг явлений. В каждой модели содержатся произвольные параметры, значения которых подбираются так, чтобы получить согласие с экспериментом.

В рамках курса общей физики невозможно описать все имеющиеся модели ядра. Мы вынуждены ограничиться кратким рассказом лишь о двух из них — капельной и оболочечной моделях.

**Капельная модель.** Эта модель предложена Я.И. Френкелем в 1939 г. и развита затем Н. Бором и другими учеными. Френкель обратил внимание на сходство атомного

ядра с капелькой жидкости, заключающееся в том, что в обоих случаях силы, действующие между составными частицами — молекулами в жидкости и нуклонами в ядре, — являются короткодействующими. Кроме того, практически одинаковая плотность вещества в разных ядрах свидетельствует о крайне малой сжимаемости ядерного вещества. Столь же малой сжимаемостью обладают и жидкости. Указанное сходство дало основание уподобить ядро заряженной капельке жидкости.

Капельная модель позволила вывести полуэмпирическую формулу для энергии связи частиц в ядре. Кроме того, эта модель помогла объяснить многие другие явления, в частности процесс деления тяжелых ядер.

**Оболочечная модель.** Оболочечная модель ядра была развита Марией Гёпперт-Майер[8]) и другими учеными. В этой модели нуклоны считаются движущимися независимо друг от друга в усредненном центрально-симметричном поле. В соответствии с этим имеются дискретные энергетические уровни (подобные уровням атома), заполняемые нуклонами с учетом принципа Паули (напомним, что спин нуклонов равен 1/2). Эти уровни группируются в оболочки, в каждой из которой может находиться определенное число нуклонов. Полностью заполненная оболочка образует особо устойчивое образование.

В соответствии с опытом особо устойчивыми оказываются ядра, у которых число протонов либо число нейтронов (либо оба эти числа) равно

$$2,\ 8,\ 20,\ 28,\ 50,\ 82,\ 126.$$

Эти числа получили название магических. Ядра, у которых число протонов $Z$ или число нейтронов $N$ является магическим (т. е. особо устойчивые ядра), также называются магическими. Ядра, у которых магическими являются и $Z$, и $N$, называются дважды магическими.

Дважды магических ядер известно всего пять:

$$^4_2\mathrm{He}\ (Z=2,\ N=2),\quad ^{16}_{8}\mathrm{O}\ (Z=8,\ N=8),$$

$$^{40}_{20}\mathrm{Ca}\ (Z=20,\ N=20),\quad ^{48}_{20}\mathrm{Ca}\ (Z=20,\ N=28),$$

$$^{208}_{82}\mathrm{Pb}\ (Z=82,\ N=126).$$

[8]) Мария Гёпперт-Майер (1906-1972) — американский физик.

Эти ядра особенно устойчивы. В частности, особенная устойчивость ядра гелия $^4_2$He проявляется в том, что это единственная составная частица, испускаемая тяжелыми ядрами при радиоактивном распаде (она называется $\alpha$-частицей).

## 10.4. Ядерные силы

Огромная энергия связи нуклонов в ядре указывает на то, что между нуклонами имеется очень интенсивное взаимодействие. Это взаимодействие носит характер притяжения. Оно удерживает нуклоны на расстояниях $\sim 10^{-13}$ см друг от друга, несмотря на сильное кулоновское отталкивание между протонами. Ядерное взаимодействие между нуклонами получило название сильного взаимодействия. Его можно описать с помощью поля ядерных сил. Перечислим отличительные особенности этих сил:

1. Ядерные силы являются короткодействующими. Их радиус действия имеет порядок $10^{-13}$ см. На расстояниях, существенно меньших $10^{-13}$ см, притяжение нуклонов сменяется отталкиванием.

2. Сильное взаимодействие не зависит от заряда нуклонов. Ядерные силы, действующие между двумя протонами, протоном и нейтроном и двумя нейтронами, имеют одинаковую величину. Это свойство называется зарядовой независимостью ядерных сил.

3. Ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов. Так, например, нейтрон и протон удерживаются вместе, образуя ядро тяжелого водорода дейтрон (или дейтон) только в том случае, если их спины параллельны друг другу.

4. Ядерные силы не являются центральными. Их нельзя представлять направленными вдоль прямой, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов. Нецентральность ядерных сил вытекает, в частности, из того факта, что они зависят от ориентации спинов нуклонов.

5. Ядерные силы обладают свойством насыщения (это означает, что каждый нуклон в ядре взаимодействует с ограниченным числом нуклонов). Насыщение проявляется в том, что удельная энергия связи нуклонов в ядре при увеличении числа нуклонов не растет, а остается примерно постоянной. Кроме того, на насыщение ядерных сил указывает также пропорциональность объема ядра числу образующих его нуклонов (см. формулу (10.8)).

По современным представлениям сильное взаимодействие обусловлено тем, что нуклоны виртуально обмениваются частицами, получившими название *мезонов*. Для того чтобы уяснить сущность этого процесса, рассмотрим прежде, как выглядит электромагнитное взаимодействие с точки зрения квантовой электродинамики.

Взаимодействие между заряженными частицами осуществляется через электромагнитное поле. Мы знаем, что это поле может быть представлено как совокупность фотонов. Согласно представлениям квантовой электродинамики процесс взаимодействия между двумя заряженными частицами, например электронами, заключается в обмене фотонами. Каждая частица создает вокруг себя поле, непрерывно испуская и поглощая фотоны. Действие поля на другую частицу проявляется в результате поглощения ею одного из фотонов, испущенных первой частицей. Такое описание взаимодействия нельзя понимать буквально. Фотоны, посредством которых осуществляется взаимодействие, являются не обычными реальными фотонами, а *виртуальными*. В квантовой механике виртуальными называются частицы, которые не могут быть обнаружены за время их существования. В этом смысле виртуальные частицы можно назвать воображаемыми.

Чтобы лучше понять смысл термина «виртуальный», рассмотрим покоящийся электрон. Процесс создания им в окружающем пространстве поля можно представить уравнением

$$e^- \rightleftarrows e^- + \hbar\omega. \qquad (10.12)$$

Суммарная энергия фотона и электрона больше, чем энергия покоящегося электрона. Следовательно, превращение, описываемое уравнением (10.12), сопровождается нарушением закона сохранения энергии. Однако для виртуального фотона это нарушение является кажущимся. Согласно квантовой механике энергия состояния, существующего в течение времени $\Delta t$, оказывается определенной лишь с точностью $\Delta E$, удовлетворяющей соотношению неопределенностей:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \qquad (10.13)$$

(см. формулу (4.5)). Из этого соотношения вытекает, что энергия системы может претерпевать отклонения $\Delta E$, длительность которых $\Delta t$ не должна превышать значения, определяемого условием (10.13). Следовательно, если испущенный электроном виртуальный фотон будет поглощен этим же или другим электроном до истечения вре-

мени $\Delta t = \hbar/\varepsilon$ (где $\varepsilon = \hbar\omega$), то нарушение закона сохранения энергии не может быть обнаружено.

При сообщении электрону дополнительной энергии (это может произойти, например, при соударении его с другим электроном) вместо виртуального может быть испущен реальный фотон, который может существовать неограниченно долго.

За определяемое условием (10.13) время $\Delta t = \hbar/\varepsilon$ виртуальный фотон может передать взаимодействие между точками, разделенными расстоянием

$$l = c\Delta t = c\frac{\hbar}{\varepsilon}.$$

Энергия фотона $\varepsilon = \hbar\omega$ может быть сколь угодно мала (частота $\omega$ изменяется от 0 до $\infty$). Поэтому радиус действия электромагнитных сил является неограниченным. Если бы частицы, которыми обмениваются взаимодействующие электроны, имели отличную от нуля массу $m$, то радиус действия соответствующих сил был бы ограничен величиной

$$r = c\Delta t_{\max} = c\frac{\hbar}{\varepsilon_{\min}} = c\frac{\hbar}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} = \lambda_C,$$

где $\lambda_C$ — комптоновская длина волны данной частицы (см. (2.24)). Мы положили, что частица — переносчик взаимодействия — движется со скоростью $c$.

В 1934 г. И.Е. Тамм высказал предположение, что взаимодействие между нуклонами также передается посредством каких-то виртуальных частиц. В то время, кроме нуклонов, были известны лишь фотон, электрон, позитрон и нейтрино. Самая тяжелая из этих частиц — электрон — обладает комптоновской длиной волны $\lambda_C = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см (см. (2.25)), на два порядка превышающей радиус действия ядерных сил. Кроме того, величина сил, которые могли бы быть обусловлены виртуальными электронами, как показали расчеты, оказалась чрезвычайно малой. Таким образом, первая попытка объяснения ядерных сил с помощью обмена виртуальными частицами оказалась неудачной.

В 1935 г. Юкава[9]) высказал смелую гипотезу о том, что в природе существуют пока не обнаруженные частицы с массой, в 200–300 раз большей массы электрона, и что

[9]) Хидэки Юкава (1907–1981) — японский физик.

эти-то частицы и выполняют роль переносчиков ядерного взаимодействия, подобно тому как фотоны являются переносчиками электромагнитного взаимодействия. Юкава назвал эти гипотетические частицы тяжелыми фотонами. В связи с тем, что по величине массы эти частицы занимают промежуточное положение между электронами и нуклонами, они впоследствии были названы мезонами (греческое «мезос» означает средний).

В 1936 г, Андерсон[10]) и Неддермейер обнаружили в космических лучах частицы с массой, равной $207m_e$. Вначале полагали, что эти частицы, получившие название $\mu$-мезонов, или мюонов, и есть переносчики взаимодействия, предсказанные Юкавой. Однако впоследствии выяснилось, что мюоны очень слабо взаимодействуют с нуклонами, так что не могут быть ответственными за ядерные взаимодействия. Только в 1947 г. Пауэлл[11]) и Оккиалини[12]) открыли в космическом излучении еще один тип мезонов — так называемые $\pi$-мезоны, или пионы, которые оказались носителями ядерных сил, предсказанными за 12 лет до того Юкавой.

Существуют положительный ($\pi^+$), отрицательный ($\pi^-$) и нейтральный ($\pi^0$) мезоны. Заряд $\pi^+$- и $\pi^-$-мезонов равен элементарному заряду $e$. Масса заряженных пионов одинакова и равна $273\,m_e$ (140 МэВ), масса $\pi^0$-мезона равна $264\,m_e$ (135 МэВ). Спин как заряженных, так и нейтрального $\pi$-мезона равен нулю ($s = 0$). Все три частицы нестабильны. Время жизни $\pi^+$- и $\pi^-$-мезонов составляет $2,60 \cdot 10^{-8}$ с, $\pi^0$-мезона — $0,8 \cdot 10^{-16}$ с.

Подавляющая часть заряженных $\pi$-мезонов распадается по схеме

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu, \quad \pi^- \to \mu^- + \widetilde{\nu} \qquad (10.14)$$

($\mu^+$ и $\mu^-$ — положительный и отрицательный мюоны, $\nu$ — нейтрино, $\widetilde{\nu}$ — антинейтрино). В среднем 2,5 распада из миллиона протекают по другим схемам (например, $\pi \to e + \nu$, $\pi \to \pi^0 + e + \nu$ и т. п., причем в случае $\pi^+$ образуется $e^+$, т. е. позитрон, а в случае $\pi^-$ возникает $e^-$, т. е. электрон).

---

[10]) Карл Дейвид Андерсон (р. в 1905 г.) — американский физик.

[11]) Сесил Франк Пауэлл (1903-1969) — английский физик.

[12]) Джузеппе Станиславо Оккиалини (р. в 1907 г.) — итальянский физик.

В среднем 98,8% $\pi^0$-мезонов распадаются на два $\gamma$-кванта:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma. \tag{10.15}$$

Остальные 1,2% распадов осуществляются по схемам:

$$\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma, \quad \pi^0 \to e^+ + e^- + e^+ + e^-, \quad \pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma.$$

Частицы, называемые $\mu$-мезонами или мюонами, принадлежат к классу **лептонов** (см. § 11.1), а не мезонов. Поэтому в дальнейшем мы будем называть их мюонами. Мюоны имеют положительный ($\mu^+$) или отрицательный ($\mu^-$) заряд, равный элементарному заряду $e$ (нейтрального мюона не существует). Масса мюона равна $207\, m_e$ (106 МэВ), спин — половине ($s = 1/2$). Мюоны, как и $\pi$-мезоны, нестабильны, они распадаются по схеме:

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \tilde{\nu}, \quad \mu^- \to e^- + \nu + \tilde{\nu}. \tag{10.16}$$

Время жизни обоих мюонов одинаково и равно $2,2 \cdot 10^{-6}$ с.

Обратимся к рассмотрению обменного взаимодействия между нуклонами. В результате виртуальных процессов

$$p \rightleftarrows n + \pi^+, \tag{10.17}$$

$$n \rightleftarrows p + \pi^-, \tag{10.18}$$

$$p \rightleftarrows p + \pi^0, \quad n \rightleftarrows n + \pi^0 \tag{10.19}$$

нуклон оказывается окруженным облаком виртуальных $\pi$-мезонов, образующих поле ядерных сил. Поглощение этих мезонов другим нуклоном приводит к сильному взаимодействию между нуклонами, которое осуществляется по одной из следующих схем:

1) $$p + n \rightleftarrows n + \pi^+ + n \rightleftarrows n + p.$$

Протон испускает виртуальный $\pi^+$-мезон, превращаясь в нейтрон. Мезон поглощается нейтроном, который

Рис. 10.2

вследствие этого превращается в протон. Затем такой же процесс протекает в обратном направлении (рис. 10.2 *а*).

Каждый из взаимодействующих нуклонов часть времени проводит в заряженном состоянии, а часть — в нейтральном.

2) $$n + p \rightleftarrows p + \pi^- + p \rightleftarrows p + n.$$

Нейтрон и протон обмениваются $\pi^-$-мезонами (рис. 10.2 *б*).

3) $$p + n \rightleftarrows p + \pi^0 + n \rightleftarrows p + n,$$
$$p + p \rightleftarrows p + \pi^0 + p \rightleftarrows p + n,$$
$$n + n \rightleftarrows n + \pi^0 + n \rightleftarrows n + n.$$

Нуклоны обмениваются $\pi^0$-мезонами (рис. 10.2 *в*).

Первый из трех описанных выше процессов находит экспериментальное подтверждение в рассеянии нейтронов на протонах. При прохождении пучка нейтронов через водород в этом пучке появляются протоны, многие из которых имеют ту же энергию и направление движения, что и падающие нейтроны. Соответствующее число практически покоящихся нейтронов обнаруживается в мишени. Совершенно невероятно, чтобы такое большое число нейтронов полностью передавало свой импульс ранее покоившимся протонам в результате лобовых ударов. Поэтому приходится признать, что часть нейтронов, пролетая вблизи протонов, захватывает один из виртуальных $\pi^+$-мезонов. В результате нейтрон превращается в протон, а потерявший свой заряд протон превращается в нейтрон (рис. 10.3).



Рис. 10.3

Если нуклону сообщить энергию, эквивалентную массе $\pi$-мезона, то виртуальный $\pi$-мезон может стать реальным. Необходимая энергия может быть сообщена при столкновении достаточно ускоренных нуклонов (или ядер) либо при поглощении нуклоном $\gamma$-кванта. При очень больших энергиях соударяющихся частиц может возникнуть несколько реальных $\pi$-мезонов.

Теперь мы имеем возможность объяснить существование магнитного момента у нейтрона и аномального магнитного момента протона (см. § 10.1). В соответствии с процессом (10.18) нейтрон часть времени проводит в виртуальном состоянии $(p + \pi^-)$. Орбитальное движение $\pi^-$-мезона приводит к возникновению наблюдаемого у нейтрона отрицательного магнитного момента. Аномаль-

ный магнитный момент протона ($2,79\mu_я$ вместо одного ядерного магнетона) также можно объяснить орбитальным движением $\pi^+$-мезона в течение того промежутка времени, когда протон находится в виртуальном состоянии $(n+\pi^+)$.

## 10.5. Радиоактивность

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц. Такие превращения претерпевают только нестабильные ядра. К числу радиоактивных процессов относятся: 1) $\alpha$-распад, 2) $\beta$-распад (в том числе электронный захват), 3) $\gamma$-излучение ядер, 4) спонтанное деление тяжелых ядер, 5) протонная радиоактивность.

Радиоактивность, наблюдающаяся у ядер, существующих в природных условиях, называется естественной. Радиоактивность ядер, полученных посредством ядерных реакций, называется искусственной. Между искусственной и естественной радиоактивностью нет принципиального различия. Процесс радиоактивного превращения в обоих случаях подчиняется одинаковым законам.

**Закон радиоактивного превращения.** Отдельные радиоактивные ядра претерпевают превращение независимо друг от друга. Поэтому можно считать, что число ядер $dN$, распадающихся за малый промежуток времени $dt$, пропорционально как числу имеющихся ядер $N$, так и промежутку времени $dt$:

$$dN = -\lambda N\,dt. \tag{10.20}$$

Здесь $\lambda$ — характерная для радиоактивного вещества константа, называемая постоянной распада. Знак минус взят для того, чтобы $dN$ можно было рассматривать как приращение числа нераспавшихся ядер $N$.

Интегрирование выражения (10.20) приводит к соотношению

$$N = N_0 \exp(-\lambda t), \tag{10.21}$$

где $N_0$ — количество ядер в начальный момент, $N$ — количество нераспавшихся атомов в момент времени $t$. Формула (10.21) выражает закон радиоактивного превращения. Этот закон весьма прост: *число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте.*

Число ядер, распавшихся за время $t$, определяется выражением

$$N_0 - N = N_0[1 - \exp(-\lambda t)]. \qquad (10.22)$$

Время, за которое распадается половина первоначального количества ядер, называется периодом полураспада $T$. Это время определяется условием

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp(-\lambda T),$$

откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \qquad (10.23)$$

Период полураспада для известных в настоящее время радиоактивных ядер находится в пределах от $3 \cdot 10^{-7}$ с до $5 \cdot 10^{15}$ лет.

Найдем среднее время жизни радиоактивного ядра. Количество ядер $dN(t)$, испытывающих превращение за промежуток времени от $t$ до $t + dt$, определяется модулем выражения (10.20): $dN(t) = \lambda N(t)\,dt$. Время жизни каждого из этих ядер равно $t$. Следовательно, сумма времен жизни всех $N_0$ имевшихся первоначально ядер получается путем интегрирования выражения $t\,dN(t)$. Разделив эту сумму на число ядер $N_0$, получим среднее время жизни $\tau$ радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\,dN(t) = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N(t)\,dt.$$

Подставим сюда выражение (10.21) для $N(t)$:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N_0 \exp(-\lambda t)\,dt = \int_0^\infty t\lambda \exp(-\lambda t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

(надо перейти к переменной $x = \lambda t$ и осуществить интегрирование по частям). Таким образом, среднее время жизни есть величина, обратная постоянной распада $\lambda$:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \qquad (10.24)$$

Сравнение с (10.23) показывает, что период полураспада $T$ отличается от $\tau$ числовым множителем, равным $\ln 2$.

Часто бывает, что возникающие в результате радиоактивного превращения ядра в свою очередь оказываются радиоактивными и распадаются со скоростью, характеризуемой постоянной распада $\lambda'$. Новые продукты распада могут также оказаться радиоактивными и т. д. В результате возникает целый ряд радиоактивных превращений. В природе существует три радиоактивных ряда (или семейства), родоначальниками которых являются $^{238}$U (ряд урана), $^{232}$Th (ряд тория) и $^{235}$U (ряд актиноурана). Конечными продуктами во всех трех случаях служат изотопы свинца — в первом случае $^{206}$Pb, во втором $^{208}$Pb и, наконец, в третьем $^{207}$Pb.

Естественная радиоактивность была открыта в 1896 г. Беккерелем[13]). Большой вклад в изучение радиоактивных веществ внесли Пьер Кюри и Мария Склодовская-Кюри[14]). Было обнаружено, что имеется три вида радиоактивных излучений. Одно из них, получившее название α-лучей, отклоняется под действием магнитного поля в ту же сторону, в которую отклонялся бы поток положительно заряженных частиц. Второе, названное β-лучами, отклоняется магнитным полем в противоположную сторону, т. е. так, как отклонялся бы поток отрицательно заряженных частиц. Наконец, третье излучение, никак не реагирующее на действие магнитного поля, было названо γ-лучами. Впоследствии выяснилось, что γ-лучи представляют собой электромагнитное излучение весьма малой длины волны (от $10^{-3}$ до 1 Å).

**Альфа-распад.** Альфа-лучи представляют собой поток ядер гелия $^4_2$He. Распад протекает по следующей схеме:

$$^A_Z\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^4_2\mathrm{He}. \qquad (10.25)$$

Буквой X обозначен химический символ распадающегося (материнского) ядра, буквой Y — химический символ образующегося (дочернего) ядра. Альфа-распад обычно сопровождается испусканием дочерним ядром γ-лучей. Из схемы распада видно, что атомный номер дочернего вещества на 2 единицы, а массовое число на 4 единицы меньше, чем у исходного вещества. Примером может служить рас-

[13]) Антуан Анри Беккерель (1852–1908) — французский физик.

[14]) Мария Склодовская-Кюри (1867–1934) — французский физик и химик, по национальности полька, с 1891 г. работала во Франции.

пад изотопа урана $^{238}$U, протекающий с образованием тория:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \to ^{234}_{90}\mathrm{Th} + ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Скорости, с которыми $\alpha$-частицы (т. е. ядра $^{4}_{2}$He) вылетают из распавшегося ядра, очень велики ($\sim 10^9$ см/с; кинетическая энергия порядка нескольких мегаэлектронвольт). Пролетая через вещество, $\alpha$-частица постепенно теряет свою энергию, затрачивая ее на ионизацию молекул вещества, и в конце концов останавливается. На образование одной пары ионов в воздухе тратится в среднем 35 эВ. Таким образом, $\alpha$-частица образует на своем пути примерно $10^5$ пар ионов. Естественно, что чем больше плотность вещества, тем меньше пробег $\alpha$-частиц до остановки. Так, в воздухе при нормальном давлении пробег составляет несколько сантиметров, в твердом веществе пробег имеет величину порядка $10^{-3}$ см ($\alpha$-частицы полностью задерживаются обычным листом бумаги).

Кинетическая энергия $\alpha$-частиц возникает за счет избытка энергии покоя материнского ядра над суммарной энергией покоя дочернего ядра и $\alpha$-частицы. Эта избыточная энергия распределяется между $\alpha$-частицей и дочерним ядром в отношении, обратно пропорциональном их массам[15]). Энергии (скорости) $\alpha$-частиц, испускаемых данным радиоактивным веществом, оказываются строго определенными. В большинстве случаев радиоактивное вещество испускает несколько групп $\alpha$-частиц близкой, но различной энергии. Это обусловлено тем, что дочернее ядро может возникать не только в нормальном, но и в возбужденных состояниях. На рис. 10.4 приведена схема, поясняющая возникновение различных групп $\alpha$-частиц (возникновение тон-

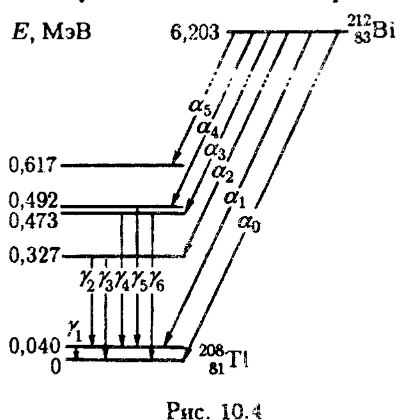


Рис. 10.4

[15]) Скорости, с которыми вылетают $\alpha$-частицы, бывают порядка 0,1 $c$. Поэтому можно пользоваться классическими выражениями для импульса и кинетической энергии частицы.

кой структуры $\alpha$-спектра), испускаемых при распаде ядер $^{212}_{83}$Bi (висмут-212). Слева на схеме изображены энергетические уровни дочернего ядра $^{208}_{81}$Tl (таллий-208). Энергия основного состояния принята за нуль. Избыток энергии покоя материнского ядра над энергией покоя $\alpha$-частицы и дочернего ядра в нормальном состоянии составляет 6,203 МэВ. Если дочернее ядро возникает в невозбужденном состоянии, вся эта энергия выделяется в виде кинетической энергии, причем на долю $\alpha$-частицы приходится

$$E_{\text{к}} = 6,203 \cdot \frac{208}{212} = 6,086 \text{ МэВ}$$

(эта группа частиц обозначена на схеме через $\alpha_0$). Если же дочернее ядро возникает в пятом возбужденном состоянии, энергия которого на 0,617 МэВ превышает энергию нормального состояния, то выделившаяся энергия составит $6,203 - 0,617 = 5,586$ МэВ, и на долю $\alpha$-частицы достанется 5,481 МэВ (группа частиц $\alpha_5$). Относительное количество частиц примерно равно 27 % для $\alpha_0$, 70 % для $\alpha_1$ и всего лишь 0,01 % для $\alpha_5$. Относительные количества $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\alpha_4$ также очень малы (порядка 0,1—1 %).

Среднее время жизни $\tau$ возбужденных состояний для большинства ядер лежит в пределах от $10^{-8}$ до $10^{-15}$ с [16]). За время, равное в среднем $\tau$, дочернее ядро переходит в нормальное или более низкое возбужденное состояние, испуская $\gamma$-фотон. На рис. 10.4 показано возникновение $\gamma$-фотонов шести различных энергий.

Энергия возбуждения дочернего ядра может быть выделена и другими способами. Возбужденное ядро может испустить какую-либо частицу: протон, нейтрон, электрон или $\alpha$-частицу. Наконец, образовавшееся в результате $\alpha$-распада возбужденное ядро может отдать избыток энергии непосредственно (без предварительного испускания $\gamma$-кванта) одному из электронов $K$-, $L$- или даже $M$-оболочки атома, в результате чего электрон вылетает из атома. Этот процесс носит название внутренней конверсии. Возникшее в результате вылета электрона вакантное место будет заполняться электронами с вышележащих энергетических уровней. Поэтому внутренняя

[16]) В отдельных случаях оно может оказаться очень большим (до нескольких лет). Уровни с таким временем жизни называются изомерными, а возбужденное ядро — изомером.

конверсия всегда сопровождается испусканием характеристических рентгеновских лучей.

Подобно тому как фотон не существует в готовом виде в недрах атома и возникает лишь в момент излучения, $\alpha$-частица также возникает в момент радиоактивного распада ядра. Покидая ядро, $\alpha$-частице приходится преодолевать потенциальный барьер, высота которого превосходит полную энергию $\alpha$-частицы, равную в среднем 6 МэВ (рис. 10.5). Внешняя, спадающая асимптотически к нулю

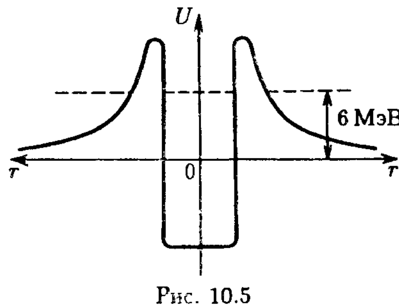



Рис. 10.5

сторона барьера обусловлена кулоновским отталкиванием $\alpha$-частицы и дочернего ядра. Внутренняя сторона барьера обусловлена ядерными силами. Опыты по рассеянию $\alpha$-частиц тяжелыми $\alpha$-радиоактивными ядрами показали, что высота барьера заметно превышает энергию вылетающих при распаде $\alpha$-частиц. По классическим представлениям преодоление частицей потенциального барьера при указанных условиях невозможно. Однако согласно квантовой механике имеется отличная от нуля вероятность того, что частица просочится через барьер, как бы пройдя по туннелю, имеющемуся в барьере. Это явление, называемое туннельным эффектом, было нами рассмотрено в § 4.9. Теория $\alpha$-распада, основывающаяся на представлении о туннельном эффекте, приводит к результатам, хорошо согласующимся с данными опыта.

**Бета-распад.** Существует три разновидности $\beta$-распада. В одном случае ядро, претерпевающее превращение, испускает электрон, в другом — позитрон, в третьем случае, называемом электронным захватом ($e$-захватом), ядро поглощает один из электронов $K$-оболочки, значительно реже $L$- или $M$-оболочки (соответственно вместо $e$-захвата говорят о $K$-захвате, $L$-захвате или $M$-захвате).

Первый вид распада ($\beta^-$-**распад** или **электронный распад**) протекает по схеме

$$^A_ZX \to {}_{Z+1}^{\ A}Y + {}_{-1}^{\ 0}e + \tilde{\nu}. \qquad (10.26)$$

Чтобы подчеркнуть сохранение заряда и числа нуклонов в процессе $\beta$-распада, мы приписали $\beta$-электрону зарядовое число $Z = -1$ и массовое число $A = 0$.

Из схемы (10.26) видно, что дочернее ядро имеет атомный номер, на единицу больший, чем у материнского ядра, массовые числа обоих ядер одинаковы. Наряду с электроном испускается также антинейтрино $\tilde{\nu}$. Весь процесс протекает так, как если бы один из нейтронов ядра $^A_ZX$ превратился в протон, претерпев превращение по схеме (10.7). Вообще процесс (10.7) представляет собой частный случай процесса (10.26). Поэтому говорят, что свободный нейтрон $\beta$-радиоактивен.

Бета-распад может сопровождаться испусканием $\gamma$-лучей. Механизм их возникновения тот же, что и в случае $\alpha$-распада, — дочернее ядро возникает не только в нормальном, но и в возбужденных состояниях. Переходя затем в состояние с меньшей энергией, ядро высвечивает $\gamma$-фотон. Примером $\beta^-$-распада может служить превращение тория $^{234}$Th в протактиний $^{234}$Pa с испусканием электрона и антинейтрино:

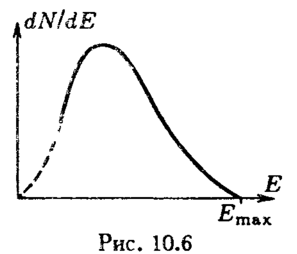


Рис. 10.6

$$^{234}_{90}Th \to {}^{234}_{91}Pa + {}_{-1}^{\ 0}e + \tilde{\nu}.$$

В отличие от $\alpha$-частиц, обладающих в пределах каждой группы строго определенной энергией, $\beta$-электроны обладают самой разнообразной кинетической энергией от 0 до $E_{max}$. На рис. 10.6 изображен энергетический спектр электронов, испускаемых ядрами при $\beta$-распаде. Площадь, охватываемая кривой, дает общее число электронов, испускаемых в единицу времени, $dN$ — число электронов, энергия которых заключена в интервале $dE$. Энергия $E_{max}$ соответствует разности между массой материнского ядра и массами электрона и дочернего ядра. Следовательно, распады, при которых энергия электрона $E$ меньше $E_{max}$, протекают с кажущимся нарушением закона сохранения энергии.

Чтобы объяснить исчезновение энергии $E_{max} - E$, В. Паули высказал в 1932 г. предположение, что при

$\beta$-распаде вместе с электроном испускается еще одна частица, которая уносит с собой энергию $E_{max} - E$. Так как эта частица никак себя не обнаруживает, следовало признать, что она нейтральна и обладает весьма малой массой (в настоящее время установлено, что масса этой частицы близка к нулю). По предложению Э. Ферми эту гипотетическую частицу назвали **нейтрино**[17]) (что означает «маленький нейтрон»).

Имеется еще одно основание для предположения о нейтрино (или антинейтрино). Спин нейтрона, протона и электрона одинаков и равен 1/2. Если написать схему (10.26) без антинейтрино, то суммарный спин возникающих частиц (который для двух частиц с $s = 1/2$ может быть либо нулем, либо единицей) будет отличаться от спина исходной частицы. Таким образом, участие в $\beta$-распаде еще одной частицы диктуется законом сохранения момента импульса, причем этой частице необходимо приписать спин, равный 1/2 (или 3/2). Установлено, что спин нейтрино (и антинейтрино) равен 1/2.

Непосредственное экспериментальное доказательство существования нейтрино было получено только в 1956 г.

Итак, энергия, выделяющаяся при $\beta^-$-распаде, распределяется между электроном и антинейтрино (либо между позитроном и нейтрино, см. ниже) в самых разнообразных пропорциях.

Второй вид распада (**$\beta^+$-распад** или **позитронный распад**) протекает по схеме

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + {}^{\;\,0}_{+1}e + \nu. \qquad (10.27)$$

В качестве примера можно привести превращение азота $^{13}$N в углерод $^{13}$C:

$$ {}^{13}_{7}\mathrm{N} \to {}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{\;\,0}_{+1}e + \nu. $$

Из схемы (10.27) видно, что атомный номер дочернего ядра не единицу меньше, чем материнского. Процесс сопровождается испусканием позитрона $e^+$ (в формуле (10.27) он обозначен символом ${}^{\;\,0}_{+1}e$) и нейтрино $\nu$, возможно также возникновение $\gamma$-лучей. Позитрон явля-

[17]) В соответствии с принятой в настоящее время классификацией при $\beta^-$-распаде испускается не нейтрино, а антинейтрино.

ется античастицей для электрона. Следовательно, обе частицы, испускаемые при распаде (10.27), представляют собой античастицы по отношению к частицам, испускаемым при распаде (10.26).

Процесс $\beta^+$-распада протекает так, как если бы один из протонов исходного ядра превратился в нейтрон, испустив при этом позитрон и нейтрино:

$$p \to n + e^+ + \nu. \qquad (10.28)$$

Для свободного протона такой процесс невозможен по энергетическим соображениям, так как масса протона меньше массы нейтрона. Однако протон в ядре может заимствовать требуемую энергию от других нуклонов, входящих в состав ядра.

Третий вид $\beta$-распада (**электронный захват**) заключается в том, что ядро поглощает один из $K$-электронов (реже один из $L$- или $M$-электронов) своего атома, в результате чего один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом нейтрино: $p + e^- \to n + \nu$. Возникшее ядро может оказаться в возбужденном состоянии. Переходя затем в более низкие энергетические состояния, оно испускает $\gamma$-фотоны. Схема процесса выглядит следующим образом:

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}e \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + \nu. \qquad (10.29)$$

Место в электронной оболочке, освобожденное захваченным электроном, заполняется электронами из вышележащих слоев, в результате чего возникают рентгеновские лучи. Электронный захват легко обнаруживается по сопровождающему его рентгеновскому излучению. Именно этим путем и был открыт $K$-захват Альваресом[18]) в 1937 г. Примером электронного захвата может служить превращение калия $^{40}$K в аргон $^{40}$Ar:

$${}^{40}_{19}\mathrm{K} + {}^{0}_{-1}e \to {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \nu.$$

**Спонтанное деление тяжелых ядер.** В 1940 г. советскими физиками Г.Н. Флеровым и К.А. Петржаком был обнаружен процесс самопроизвольного деления ядер урана на две примерно равные части. Впоследствии это явление было наблюдено и для многих других тяжелых ядер. По своим характерным чертам спонтанное деление близко к вынужденному делению, которое рассматривается в § 10.7.

---

[18]) Луис Уолтер Альварес (р. в 1911 г.) — американский физик.

**Протонная радиоактивность.** Как следует из названия, при протонной радиоактивности ядро претерпевает превращение, испуская один или два протона (в последнем случае говорят о двупротонной радиоактивности). Этот вид радиоактивности наблюдался впервые в 1963 г. группой советских физиков, руководимой Г.Н. Флеровым.

**Активность радиоактивного вещества.** Активностью радиоактивного препарата называется число распадов, происходящих в препарате за единицу времени. Если за время $dt$ распадается $dN_{\text{расп}}$ ядер, то активность равна $dN_{\text{расп}}/dt$. Согласно (10.20)

$$dN_{\text{расп}} = |dN| = \lambda N\, dt.$$

Отсюда следует, что активность радиоактивного препарата равна $\lambda N$, т. е. произведению постоянной распада на количество имеющихся в препарате нераспавшихся ядер.

В международной системе единиц (СИ) единицей активности является беккерель (Бк), равный одному распаду в секунду. Допускается применение внесистемных единиц расп./мин и кюри (Ки). Единица активности, называемая кюри, определяется как активность такого препарата, в котором происходит $3,700 \cdot 10^{10}$ актов распада в секунду. Применяются дробные единицы (килокюри, мегакюри и т. д.).

## 10.6. Ядерные реакции

Ядерной реакцией называется процесс сильного взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер). Взаимодействие реагирующих частиц возникает при сближении их до расстояний порядка $10^{-13}$ см благодаря действию ядерных сил.

Наиболее распространенным видом ядерной реакции является взаимодействие легкой частицы $a$ с ядром X, в результате которого образуется легкая частица $b$ и ядро Y:

$$\mathrm{X} + a \to \mathrm{Y} + b.$$

Уравнение таких реакций принято записывать сокращенно в виде

$$\mathrm{X}(a, b)\mathrm{Y}. \qquad (10.30)$$

В скобках указываются участвующие в реакции легкие частицы; сначала исходная, затем конечная.

В качестве легких частиц $a$ и $b$ могут фигурировать нейтрон ($n$), протон ($p$), дейтрон ($d$), $\alpha$-частица ($\alpha$) и $\gamma$-фотон ($\gamma$).

Ядерные реакции могут сопровождаться как выделением, так и поглощением энергии. Количество выделяющейся энергии называется энергией реакции. Она определяется разностью масс (выраженных в энергетических единицах) исходных и конечных ядер. Если сумма масс образующихся ядер превосходит сумму масс исходных ядер, реакция идет с поглощением энергии и энергия реакции будет отрицательной.

В 1936 г. Н. Бор установил, что реакции, вызываемые не очень быстрыми частицами, протекают в два этапа. Первый этап заключается в захвате приблизившейся к ядру X частицы $a$ и в образовании промежуточного ядра П, называемого составным ядром или компаунд-ядром. Энергия, привнесенная частицей $a$ (она слагается из кинетической энергии частицы и энергии ее связи с ядром), за очень короткое время перераспределяется между всеми нуклонами составного ядра, в результате чего это ядро оказывается в возбужденном состоянии. На втором этапе составное ядро испускает частицу $b$. Символически такое двустадийное протекание реакции записывается следующим образом:

$$\mathrm{X} + a \to \Pi \to \mathrm{Y} + b. \qquad (10.31)$$

Если испущенная частица тождественна с захваченной ($b \equiv a$), процесс (10.31) называют рассеянием. В случае, когда энергия частицы $b$ равна энергии частицы $a$ ($E_b = E_a$), рассеяние является упругим, в противном случае (т. е. при $E_b \neq E_a$) — неупругим. Ядерная реакция имеет место, если частица $b$ не тождественна $a$.

Промежуток времени $\tau_я$, который требуется нуклону с энергией порядка 1 МэВ (что соответствует скорости нуклона около $10^9$ см/с) для того, чтобы пройти расстояние, равное диаметру ядра ($10^{-12}$ см), называется ядерным временем (или ядерным временем пролета). Это время по порядку величины равно

$$\tau_я \approx \frac{10^{-12}\ \text{см}}{10^9\ \text{см/с}} = 10^{-21}\ \text{с}. \qquad (10.32)$$

Среднее время жизни составного ядра (равное $10^{-14}$ – $10^{-12}$ с) на много порядков превосходит ядерное время пролета $\tau_я$. Следовательно, распад составного ядра (т. е. испускание им частицы $b$) представляет собой процесс, не зависящий от первого этапа реакции, заключающегося в захвате частицы $a$ (составное ядро как бы «забывает» способ своего образования). Одно и то же составное ядро может распадаться различными путями, причем характер этих путей и их относительная вероятность не зависят от способа образования составного ядра.

Реакции, вызываемые быстрыми нуклонами и дейтронами, протекают без образования промежуточного ядра. Такие реакции носят название прямых ядерных взаимодействий. Типичной реакцией прямого взаимодействия является реакция срыва, наблюдающаяся при нецентральных соударениях дейтрона с ядром. При таких соударениях один из нуклонов дейтрона может попасть в зону действия ядерных сил и будет захвачен ядром, в то время как другой нуклон останется вне зоны действия ядерных сил и пролетит мимо ядра. Символически эту реакцию можно представить в виде $(d, p)$ или $(d, n)$.

Обратной реакции срыва является реакция подхвата — налетевший нуклон ($n$ или $p$) откалывает от ядра один из нуклонов ($p$ или $n$), превращаясь при этом в дейтрон: $(n, d)$ либо $(p, d)$.

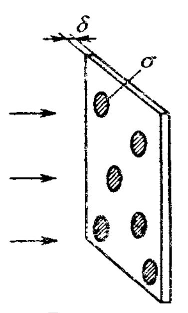


Рис. 10.7

В ядерной физике вероятность взаимодействия принято характеризовать с помощью эффективного сечения $\sigma$. Смысл этой величины заключается в следующем. Пусть поток частиц, например, нейтронов, падает на мишень, настолько тонкую, что ядра мишени не перекрывают друг друга (рис. 10.7). Если бы ядра были твердыми шариками с поперечным сечением $\sigma$, а падающие частицы — твердыми шариками с исчезающе малым сечением, то вероятность того, что падающая частица заденет одно из ядер мишени, была бы равна

$$P = \sigma n \delta,$$

где $n$ — концентрация ядер, т. е. число их в единице объема мишени, $\delta$ — толщина мишени ($\sigma n \delta$ определяет относительную долю площади мишени, перекрытую ядрами-шариками).

Пусть на мишень падает перпендикулярно к ее поверхности поток частиц $N$ [19]. Тогда количество частиц, претерпевающих в единицу времени столкновения с ядрами мишени, $\Delta N$, определяется формулой

$$\Delta N = NP = N\sigma n\delta. \tag{10.33}$$

Следовательно, определив относительное количество частиц, претерпевших столкновения, $\Delta N/N$, можно было бы вычислить поперечное сечение $\sigma = \pi r^2$ ядра по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta N}{Nn\delta}. \tag{10.34}$$

В действительности ни ядра мишени, ни падающие на нее частицы не являются твердыми шариками. Однако по аналогии с моделью сталкивающихся шариков для характеристики вероятности взаимодействия используют величину $\sigma$, определяемую формулой (10.34), в которой под $\Delta N$ подразумевают не число столкнувшихся, а число провзаимодействовавших с ядрами мишени частиц. Эта величина и называется эффективным сечением для данной реакции (или процесса).

В случае толстой мишени поток частиц будет по мере прохождения через нее постепенно ослабевать. Разбив мишень на тонкие слои, напишем соотношение (10.33) для слоя толщины $dx$, находящегося на глубине $x$ от поверхности:

$$dN = -N(x)\sigma n\,dx,$$

где $N(x)$ — поток частиц на глубине $x$. Мы написали знак минус, чтобы $dN$ можно было рассматривать как приращение (а не ослабление) потока на пути $dx$. Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению

$$N(\delta) = N_0 \exp(-\sigma n\delta),$$

в котором $N_0$ — первичный поток, а $N(\delta)$ — поток на глубине $\delta$. Таким образом, измеряя ослабление потока частиц при прохождении их через мишень толщины $\delta$, можно определить сечение взаимодействия по формуле

$$\sigma = \frac{1}{n\delta}\ln\frac{N_0}{N(\delta)}. \tag{10.35}$$

[19]) Напомним, что потоком частиц называется количество частиц, пролетающих через некоторую поверхность в единицу времени.

Эффективные сечения ядерных процессов принято выражать в единицах, получивших название барн:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2. \qquad (10.36)$$

Впервые ядерная реакция была осуществлена Резерфордом в 1919 г. При облучении азота $\alpha$-частицами, испускаемыми радиоактивным источником, некоторые ядра азота превращались в ядра кислорода, испуская при этом протон. Уравнение этой реакции имеет вид

$$^{14}_{7}\text{N}(\alpha, p)\,^{17}_{8}\text{O}.$$

Резерфорд воспользовался для расщепления атомного ядра природными снарядами — $\alpha$-частицами. Первая ядерная реакция, вызванная искусственно ускоренными частицами, была осуществлена Кокрофтом[20]) и Уолтоном[21]) в 1932 г. С помощью так называемого умножителя напряжения они ускоряли протоны до энергии примерно 0,8 МэВ и наблюдали реакцию

$$^{7}_{3}\text{Li}(p, \alpha)\,^{4}_{2}\text{He}.$$

В дальнейшем по мере развития техники ускорения заряженных частиц множилось число ядерных превращений, осуществляемых искусственным путем.

Наибольшее значение имеют реакции, вызываемые нейтронами. В отличие от заряженных частиц ($p$, $d$, $\alpha$) нейтроны не испытывают кулоновского отталкивания, вследствие чего они могут проникать в ядра, обладая весьма малой энергией. Эффективные сечения реакций обычно возрастают при уменьшении энергии нейтронов. Это можно объяснить тем, что чем меньше скорость нейтрона, тем больше время, которое он проводит в сфере действия ядерных сил, пролетая вблизи ядра, и, следовательно, тем больше вероятность его захвата. Поэтому многие эффективные сечения изменяются как $1/v \sim E^{-1/2}$. Однако часто наблюдаются случаи, когда сечение захвата нейтронов имеет резко выраженный максимум для нейтронов определенной энергии $E_r$. В качестве примера на рис. 10.8 приведена кривая зависимости сечения захвата нейтрона ядром $^{238}$U от энергии нейтрона $E$. Масштаб по обеим осям — логарифмический. В этом случае зависимость

[20]) Джон Дуглас Кокрофт (1897–1967) — английский физик.

[21]) Эрнест Томас Синтон Уолтон (р. в 1903 г.) — ирландский физик.

$\sigma \sim E^{-1/2}$ изображается прямой линией, описываемой уравнением

$$\ln\sigma = \mathrm{const} - (1/2)\ln E.$$

Из рисунка видно, что, кроме области энергий вблизи 7 эВ, ход $\ln\sigma$ с $\ln E$ действительно близок к прямолинейному. При $E = E_r = 7$ эВ сечение захвата резко возрастает, достигая 23 000 барн. Вид кривой указывает на то, что явление имеет резонансный характер. Такое резонанс-

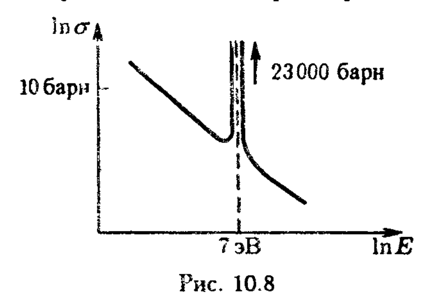



Рис. 10.8

ное поглощение имеет место в том случае, когда энергия, привносимая нейтроном в составное ядро, в точности равна той энергии, которая необходима для перевода составного ядра на возбужденный энергетический уровень. Подобным же образом для фотонов, энергия которых равна разности энергий между первым возбужденным и основным уровнями атома, вероятность поглощения особенно велика (резонансное поглошение света).

Представляет интерес реакция

$${}^{14}_{7}\mathrm{N}(n,\,p)\,{}^{14}_{6}\mathrm{C},$$

которая постоянно протекает в атмосфере под действием нейтронов, образуемых космическими лучами. Возникающий при этом углерод ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ называется **радиоуглеродом**, так как он $\beta^-$-радиоактивен; его период полураспада составляет 5730 лет. Радиоуглерод усваивается при фотосинтезе растениями и участвует в круговороте веществ в природе.

Количество возникающих в атмосфере в единицу времени ядер радиоуглерода $\Delta N_+$ в среднем остается постоянным. Количество распадающихся ядер $\Delta N_-$ пропорционально числу имеющихся ядер $N$: $\Delta N_- = kN$.

Так как период полураспада очень велик, устанавливается равновесная концентрация ядер ${}^{14}\mathrm{C}$ в обычном угле-

роде, отвечающая условию

$$\Delta N_+ = \Delta N_- \quad \text{или} \quad \Delta N_+ = kN.$$

Специальные исследования показали, что вследствие действия ветров и океанских течений равновесная концентрация $^{14}C$ в различных местах земного шара одинакова и соответствует примерно 14 распадам в минуту на каждый грамм углерода.

Пока организм живет, убыль в нем $^{14}C$ из-за радиоактивности восполняется за счет участия в круговороте веществ в природе. В момент смерти организма процесс усвоения сразу же прекращается, и концентрация $^{14}C$ в обычном углероде начинает убывать по закону радиоактивного распада. Следовательно, измерив концентрацию $^{14}C$ в останках организмов (в древесине, костях и т. п.), можно определить дату их смерти или, как говорят, их возраст. Проверка этого метода на древних образцах, возраст которых точно определен историческими методами, дала вполне удовлетворительные результаты.

## 10.7. Деление ядер

В 1938 г. Ган[22]) и Штрассман[23]) обнаружили, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической системы — барий и лантан. Объяснение этого явления было дано Фришем[24]) и Мейтнер[25]). Они высказали предположение, что ядро урана делится на две примерно равные части, получившие название осколков деления.

Дальнейшие исследования показали, что деление может происходить разными путями. Всего образуется около 80 различных осколков, причем наиболее вероятным является деление на осколки, массы которых относятся как 2 : 3. Кривая, изображенная на рис. 10.9, дает относительный выход (в процентах) осколков разной массы, возникающих при делении $^{235}U$ медленными (тепловыми[26]))

[22]) Отто Ган (1879–1968) — немецкий радиохимик.

[23]) Фриц Штрассман (1902–1980) — немецкий химик и физик.

[24]) Отто Роберт Фриш (1904–1979) — английский физик.

[25]) Лиза Мейтнер (1878–1968) — австрийский физик.

[26]) Тепловыми называются нейтроны, находящиеся в тепловом равновесии с атомами вещества. Их энергия равна примерно 0,025 эВ.

нейтронами (масштаб по оси ординат — логарифмический). Из этой кривой видно, что относительное число

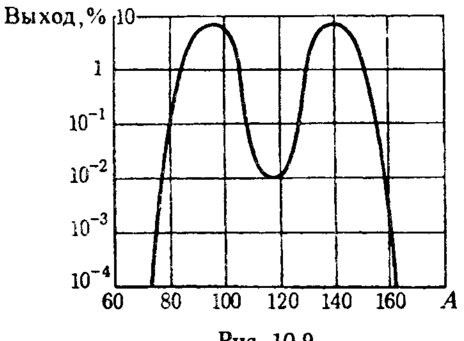



Рис. 10.9

актов деления, при которых образуются два осколка равной массы ($A \approx 117$), составляет $10^{-2}\,\%$, в то время как образование осколков с массовыми числами порядка 95 и 140 ($95 : 140 \approx 2 : 3$) наблюдается в 7 % случаев.

Удельная энергия связи для ядер средней массы примерно на 1 МэВ больше, чем у тяжелых ядер (см. рис. 10.1). Отсюда следует, что деление ядер должно сопровождаться выделением большого количества энергии. Но особенно важным оказалось то обстоятельство, что при делении каждого ядра высвобождается несколько нейтронов. Относительное количество нейтронов в тяжелых ядрах заметно больше, чем в средних ядрах. Поэтому образовавшиеся осколки оказываются сильно перегруженными нейтронами, в результате чего они выделяют по нескольку нейтронов. Большинство нейтронов испускается мгновенно (за время, меньшее $10^{-14}$ с). Часть (около 0,75 %) нейтронов, получившая название **запаздывающих нейтронов**, испускается не мгновенно, а с запаздыванием от 0,05 с до 1 мин. В среднем на каждый акт деления приходится 2,5 выделившихся нейтронов.

Выделение мгновенных и запаздывающих нейтронов не устраняет полностью перегрузку осколков деления нейтронами. Поэтому осколки оказываются в большинстве радиоактивными и претерпевают цепочку $\beta^-$-превращений, сопровождаемых испусканием $\gamma$-лучей. Поясним сказанное примером. Один из путей, которыми осуществляется деление, выглядит следующим образом:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + n \to {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} + {}^{94}_{37}\mathrm{Rb} + 2n.$$

Осколки деления — цезий и рубидий — претерпевают превращения:

$$^{140}_{55}Cs \to {}^{140}_{56}Ba \to {}^{140}_{57}La \to {}^{140}_{58}Ce,$$

$$^{94}_{37}Rb \to {}^{94}_{38}Sr \to {}^{94}_{39}Y \to {}^{94}_{40}Zr.$$

Конечные продукты — церий $^{140}Ce$ и цирконий $^{94}Zr$ — являются стабильными.

Кроме урана, при облучении нейтронами[27]) делятся торий ($^{232}_{90}Th$) и протактиний ($^{231}_{91}Pa$), а также трансурановый элемент плутоний ($^{239}_{94}Pu$). Нейтроны сверхвысоких энергий (порядка нескольких сотен мегаэлектронвольт) вызывают деление и более легких ядер. Ядра $^{235}U$ и $^{239}Pu$ делятся нейтронами любых энергий, но особенно хорошо медленными нейтронами. Тепловыми нейтронами делятся также $^{233}U$ и $^{230}Th$, но эти изотопы в природе не встречаются, они получаются искусственным путем.

Ядра $^{238}U$ делятся только быстрыми нейтронами (с энергиями, не меньшими $\sim 1$ МэВ). При меньших энергиях нейтроны поглощаются ядрами $^{238}U$ без последующего их деления. В результате образуется ядро $^{239}U$, энергия возбуждения которого выделяется в виде $\gamma$-фотона. Поэтому такой процесс называется **радиационным захватом** (реакция $(n, \gamma)$). Эффективное сечение этого процесса резко возрастает при энергии нейтронов, равной примерно 7 эВ, достигая 23 000 барн (см. рис. 10.8). Сечение захвата ядром $^{238}U$ тепловых нейтронов составляет меньше 3 барн.

Образовавшееся в результате захвата нейтрона ядро $^{239}U$ нестабильно (период полураспада $T$ равен 23 мин). Испуская электрон, антинейтрино и $\gamma$-фотон, оно превращается в ядро трансуранового элемента нептуния $^{239}Np$. Нептуний также претерпевает $\beta^-$-распад ($T$=2,3 суток), превращаясь в плутоний $^{239}Pu$. Эта цепочка превращений выглядит следующим образом:

$$^{239}_{92}U \overset{(25\text{мин})}{\to} {}^{239}_{93}Np \overset{(2{,}3\text{сут})}{\to} {}^{239}_{94}Pu. \qquad (10.37)$$

[27]) Деление тяжелых ядер может быть вызвано не только нейтронами, но и другими частицами — протонами, дейтронами, $\alpha$-частицами, а также $\gamma$-фотонами. В последнем случае говорят о фотоделении ядер.

Плутоний $\alpha$-радиоактивен, однако его период полураспада так велик (24 400 лет), что его можно считать практически стабильным.

Радиационный захват нейтронов ядром тория $^{232}$Th приводит к образованию делящегося изотопа урана $^{233}$U, отсутствующего в природном уране:

$$^{232}_{90}\mathrm{Th} + n \to {}^{233}_{90}\mathrm{Th} \overset{(22\text{мин})}{\to} {}^{233}_{91}\mathrm{Ac} \overset{(27\text{сут})}{\to} {}^{233}_{92}\mathrm{U}.$$

Уран-233 $\alpha$-радиоактивен ($T = 162\,000$ лет).

Испускание при делении ядер $^{235}$U, $^{239}$Pu и $^{233}$U нескольких нейтронов делает возможным осуществление **цепной ядерной реакции**. Действительно, испущенные при делении одного ядра $z$ нейтронов могут вызвать деление $z$ ядер, в результате будет испущено $z^2$ новых нейтронов, которые вызовут деление $z^2$ ядер, и т. д. Таким образом, количество нейтронов, рождающихся в каждом поколении, нарастает в геометрической прогрессии. Нейтроны, испускаемые при делении ядер $^{235}$U, имеют в среднем энергию 2 МэВ, что соответствует скорости $2 \cdot 10^9$ см/с. Поэтому время, протекающее между испусканием нейтрона и захватом его новым делящимся ядром, очень мало, так что процесс размножения нейтронов в делящемся веществе протекает весьма быстро.

Нарисованная нами картина является идеальной. Процесс размножения нейтронов протекал бы описанным образом при условии, что все выделившиеся нейтроны поглощаются делящимися ядрами. В действительности это далеко не так. Прежде всего из-за конечных размеров делящегося тела и большой проникающей способности нейтронов многие из них покинут зону реакции прежде, чем будут захвачены каким-либо ядром и вызовут его деление. Кроме того, часть нейтронов поглотится ядрами неделящихся примесей, вследствие чего выйдет из игры, не вызвав деления и, следовательно, не породив новых нейтронов.

Объем тела растет как куб, а поверхность — как квадрат линейных размеров. Поэтому относительная доля вылетающих наружу нейтронов уменьшается с ростом массы делящегося вещества.

Природный уран содержит 99,27 % изотопа $^{238}$U, 0,72 % $^{235}$U и около 0,01 % $^{234}$U. Следовательно, на каж-

дое делящееся под действием медленных нейтронов ядро $^{235}U$ приходится 140 ядер $^{238}U$, которые захватывают не слишком быстрые нейтроны без деления. Поэтому в природном уране цепная реакция деления не возникает.

Цепная ядерная реакция в уране может быть осуществлена двумя способами. Первый способ заключается в выделении из природного урана делящегося изотопа $^{235}U$. Вследствие химической наразличимости изотопов разделение их представляет собой весьма трудную задачу. Однако она была решена несколькими методами.

В куске чистого $^{235}U$ (или $^{239}Pu$) каждый захваченный ядром нейтрон вызывает деление с испусканием около 2,5 новых нейтронов. Однако если масса такого куска меньше определенного критического значения, то большинство испущенных нейтронов вылетает наружу, не вызвав деления, так что цепная реакция не возникает. При массе, большей критической, нейтроны быстро размножаются, и реакция приобретает взрывной характер. На этом основано действие а т о м н о й  б о м б ы. Ядерный заряд такой бомбы представляет собой два или более кусков почти чистого $^{235}U$ или $^{239}Pu$ (на рис. 10.10 они обозначены цифрой *1*). Масса каждого куска меньше критической, вследствие чего цепная реакция не возникает.


Рис. 10.10

В земной атмосфере всегда имеется некоторое количество нейтронов, рожденных космическими лучами. Поэтому, чтобы вызвать взрыв, достаточно соединить части ядерного заряда в один кусок с массой, большей критической. Это нужно делать очень быстро, и соединение кусков должно быть очень плотным. В противном случае ядерный заряд разлетится на части прежде, чем успеет прореагировать заметная доля делящегося вещества. Для соединения используется обычное взрывчатое вещество *2* (запал), с помощью которого одна часть ядерного заряда выстреливает в другую. Все устройство заключено в массивную оболочку *3* из металла большой плотности. Оболочка служит отражателем нейтронов и, кроме того, удерживает ядерный заряд от распыления до тех пор, пока максимально возможное число его ядер не выделит свою энергию при делении. Цепная реакция в атомной бомбе идет на быстрых нейтронах. При взрыве успевает прореагировать только часть ядерного заряда.

Иной способ осуществления цепной реакции используется в ядерных реакторах. В качестве делящегося вещества в реакторах служит природный (либо несколько обогащенный изотопом $^{235}$U) уран. Чтобы предотвратить радиационный захват нейтронов ядрами $^{238}$U (который становится особенно интенсивным при энергии нейтронов, равной примерно 7 эВ), сравнительно небольшие блоки делящегося вещества размещают на некотором расстоянии друг от друга, а промежутки между блоками заполняют замедлителем, т. е. веществом, в котором нейтроны замедляются до тепловых скоростей. Сечение захвата тепловых нейтронов ядром $^{238}$U составляет всего 3 барна, в то время как сечение деления $^{235}$U тепловыми нейтронами почти в 200 раз больше (580 барн). Поэтому, хотя нейтроны сталкиваются с ядрами $^{238}$U в 140 раз чаще, чем с ядрами $^{235}$U, радиационный захват происходит реже, чем деление, и при больших критических размерах всего устройства коэффициент размножения нейтронов (т. е. отношение количеств нейтронов, рождающихся в двух последующих поколениях) может достигнуть значений бо́льших единицы.

Замедление нейтронов осуществляется за счет упругого рассеяния. В этом случае энергия, теряемая замедляемой частицей, зависит от соотношения масс сталкивающихся частиц. Максимальное количество энергии теряется в случае, если обе частицы имеют одинаковую массу (см. § 3.11 кн. 1). С этой точки зрения идеальным замедлителем должно было бы быть вещество, содержащее обычный водород, например вода (массы протона и нейтрона примерно одинаковы). Однако такие вещества оказались непригодными в качестве замедлителя, потому что протоны поглощают нейтроны, вступая с ними в реакцию

$$p(n, \gamma)d.$$

Ядра замедлителя должны обладать малым сечением захвата нейтронов и большим сечением упругого рассеяния. Этому условию удовлетворяют дейтрон (ядро тяжелого водорода — дейтерия D), а также ядра графита (C) и бериллия (Be). Для уменьшения энергии нейтрона от 2 МэВ до тепловых энергий в тяжелой воде ($D_2O$) достаточно около 25 столкновений, в C или Be — примерно 100 столкновений.

Первый уран-графитовый реактор был пущен в декабре 1942 г. в Чикагском университете под руководством итальянского физика Э. Ферми. В Советском Союзе реактор такого же типа был пущен под руководством И.В. Курчатова в декабре 1946 г. в Москве.

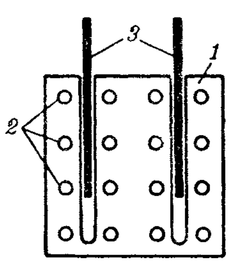


Рис. 10.11

Схема уран-графитового реактора приведена на рис. 10.11. Цифрой *1* обозначен замедлитель — графит; *2* — блоки из урана; *3* — стержни, содержащие кадмий или бор. Эти стержни служат для регулировки процесса в реакторе. Кадмий и бор интенсивно поглощают нейтроны. Поэтому введение стержней в реактор уменьшает коэффициент размножения нейтронов, а выведение — увеличивает. Специальное автоматическое устройство, управляющее стержнями, позволяет поддерживать развиваемую в реакторе мощность на заданном уровне. Регулирование значительно облегчается тем обстоятельством, что часть нейтронов, как уже отмечалось, испускается при делении ядер не мгновенно, а с запаздыванием до 1 мин.

Первые промышленные реакторы предназначались для производства делящегося материала для атомных бомб — плутония. В таких реакторах часть нейтронов, испускаемых при делении ядер $^{235}$U, идет на поддержание цепной реакции, часть же претерпевает радиационный захват ядрами $^{238}$U, что, как мы видели, приводит в конечном итоге к образованию $^{239}$Pu (см. схему (10.37)). После того как в урановых блоках накопится достаточное количество Pu, блоки извлекаются из реактора и направляются на химическую переработку для выделения из них Pu.

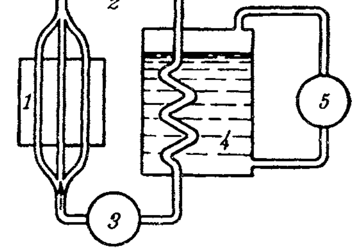


Рис. 10.12

Применение ядерной энергии для мирных целей было впервые осуществлено в СССР под руководством И.В. Курчатова. В 1954 г. в Советском Союзе была введена в эксплуатацию первая атомная электростанция мощностью 5000 кВт. Схема атомной электростанции изображена на рис. 10.12. Энергия, выделяемая в активной зоне реак-

тора *1*, снимается теплоносителем, циркулирующим в контуре *2*. Циркуляция обеспечивается насосом *3*. В качестве теплоносителя применяется вода или щелочные металлы с низкой температурой плавления, например натрий ($T_{плав} = 98\,°C$). В теплообменнике *4* теплоноситель отдает теплоту воде, превращая ее в пар, вращающий турбину *5*.

Реакторы с замедлителем работают на медленных (тепловых) нейтронах. Использовав горючее, обогащенное делящимся изотопом ($^{235}U$ или $^{239}Pu$), можно построить реактор, действующий на быстрых нейтронах. Часть нейтронов в таких реакторах используется для превращения $^{238}U$ в $^{239}Pu$ или $^{232}Th$ в $^{233}U$, причем количество образующихся ядер, способных делиться тепловыми нейтронами, может превосходить количество делящихся ядер, израсходованных на поддержание работы реактора. Следовательно, воспроизводится большее количество ядерного горючего, чем выгорает в реакторе. Поэтому такие ядерные реакторы называют **реакторами-размножителями**.

В заключение отметим, что побочными продуктами процессов, протекающих в ядерных реакторах, являются радиоактивные изотопы многих химических элементов, которые находят разнообразные применения в биологии, медицине и технике.

## 10.8. Термоядерные реакции

**Ядерный синтез**, т. е. слияние легких ядер в одно ядро, сопровождается, как и деление тяжелых ядер, выделением огромных количеств энергии. Поскольку для синтеза ядер необходимы очень высокие температуры, этот процесс называется **термоядерной реакцией**.

Чтобы преодолеть потенциальный барьер, обусловленный кулоновским отталкиванием, ядра с порядковыми номерами $Z_1$ и $Z_2$ должны обладать энергией

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_я},$$

где $r_я$ — радиус действия ядерных сил, равный примерно $2 \cdot 10^{-13}$ см. Даже для ядер с $Z_1 = Z_2 = 1$ эта энергия составляет

$$E = \frac{e^2}{r_я} = \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{2 \cdot 10^{-13}} \text{ эрг} = 1.15 \cdot 10^{-6} \text{ эрг} \approx 0,7 \text{ МэВ}.$$

На долю каждого сталкивающегося ядра приходится 0,35 МэВ. Средней энергии теплового движения, равной 0,35 МэВ, соответствует температура порядка $2 \cdot 10^9$ К. Однако синтез легких ядер может протекать и при значительно меньших температурах. Дело в том, что из-за случайного распределения частиц по скоростям всегда имеется некоторое число ядер, энергия которых значительно превышает среднее значение. Кроме того, что особенно существенно, слияние ядер может произойти вследствие туннельного эффекта. Поэтому некоторые термоядерные реакции протекают с заметной интенсивностью уже при температурах порядка $10^7$ К.

Особенно благоприятны условия для синтеза ядер дейтерия и трития, так как реакция между ними носит резонансный характер. Именно эти вещества образуют заряд водородной (или термоядерной) бомбы[28]. Запалом в такой бомбе служит обычная атомная бомба, при взрыве которой возникает температура порядка $10^7$ К. Реакция синтеза дейтрона ($d$) и ядра трития (${}^3_1\mathrm{H}$)

$${}^2_1d + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0n$$

сопровождается выделением энергии, равной 17,6 МэВ что составляет около 3, 5 МэВ на нуклон. Для сравнения укажем, что деление ядра урана приводит к высвобождению примерно 0, 85 МэВ на нуклон.

До недавнего времени представлялось несомненным, что синтез ядер водорода в ядра гелия является источником энергии Солнца[29] и звезд, температура в недрах которых достигает $10^7 - 10^8$ К. Этот синтез может осуществляться двумя путями. При более низких температурах имеет место протонно-протонный цикл, протекающий следующим образом. Вначале происходит синтез двух протонов с образованием дейтрона, позитрона и нейтрино:

$$p + p \to d + e^+ + \nu.$$

[28]) Первый термоядерный взрыв был осуществлен в Советском Союзе в 1953 г.

[29]) В середине 70-х годов появились основания сомневаться в правильности этого утверждения. Из приводимых ниже уравнений реакций видно, что синтез протонов сопровождается возникновением нейтрино, количество которых можно оценить. Однако проведенные измерения показали, что количество выделяющихся на Солнце нейтрино крайне мало. В связи с этим вопрос о природе солнечной энергии остается неясным.

Образовавшийся дейтрон, сталкиваясь с протоном, объединяется с ним в ядро $^3$He:

$$d + p \to {}^3_2\mathrm{He} + \gamma.$$

Последнее звено цикла образует реакция

$${}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^4_2\mathrm{He} + p + p.$$

При более высоких температурах большей вероятностью обладает предложенный Бете[30]) углеродный (или углеродно-азотный) цикл, который состоит из следующих звеньев:

$${}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^1_1p \to {}^{13}_{7}\mathrm{N} + \gamma,$$
$${}^{13}_{7}\mathrm{N} \to {}^{13}_{6}\mathrm{C} + e^+ + \nu,$$
$${}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^1_1p \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma,$$
$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^1_1p \to {}^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma,$$
$${}^{15}_{8}\mathrm{O} \to {}^{15}_{7}\mathrm{N} + e^+ + \nu,$$
$${}^{15}_{7}\mathrm{N} + {}^1_1p \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^4_2\mathrm{He}.$$

Итогом углеродного цикла является исчезновение четырех протонов и образование одной $\alpha$-частицы. Количество ядер углерода остается неизменным; эти ядра участвуют в реакции в роли катализатора.

В водородной бомбе термоядерная реакция носит неконтролируемый характер. Для осуществления управляемых термоядерных реакций необходимо создать и поддерживать в некотором объеме температуру порядка $10^8$ К. При столь высокой температуре вещество представляет собой полностью ионизированную плазму. На пути осуществления управляемой термоядерной реакции стоят огромные трудности. Наряду с необходимостью получить чрезвычайно высокие температуры возникает проблема удержания плазмы в заданном объеме. Соприкосновение плазмы со стенками сосуда приведет к ее остыванию. Кроме того, стенка из любого вещества при такой температуре немедленно испарится. А.Д. Сахаров[31]) и И.Е. Тамм предложили удерживать плазму в заданном объеме с помощью магнитного поля. Силы, действующие в этом поле

---

[30]) Ханс Альбрехт Бете (р. в 1906 г.) — по национальности немец, с 1935 г. в США.

[31]) Андрей Дмитриевич Сахаров (1921-1989) — советский физик.

на движущиеся заряженные частицы, заставляют их двигаться по траекториям, расположенным в ограниченной части пространства.

Осуществление управляемого термоядерного синтеза даст человечеству практически неисчерпаемый источник энергии. Поэтому работы по овладению управляемыми термоядерными реакциями ведутся во многих странах. Одним из основных направлений, в котором ведутся эти работы, является создание установок типа *токамак* (сокращение от «тороидальная камера с магнитными катушками»). Такая установка представляет собой замкнутую магнитную ловушку, имеющую форму тора. Плазма удерживается в токамаке магнитным полем очень сложной конфигурации. Разогрев плазмы осуществляется протекающим по ней током.

Основополагающий вклад в разработку систем типа токамак внес коллектив научных работников под руководством Арцимовича[32]), который в 1956 г. начал экспериментальное исследование этих систем в Институте атомной энергии имени И.В. Курчатова в Москве. Кроме того, установки типа токамак интенсивно разрабатываются в США, в странах Европейского экономического сотрудничества.

Кроме квазистационарных систем типа токамак исследуются также импульсные системы, в которых крупинки смеси дейтерия и трития подвергаются воздействию мощных импульсов лазерного излучения или электронных пучков.

---

[32]) Лев Андреевич Арцимович (1909–1973) — советский физик.

# Глава 11

# Элементарные частицы

## 11.1. Виды взаимодействия и классы элементарных частиц

Дать строгое определение понятия элементарной частицы оказывается затруднительным. В качестве первого приближения можно понимать под элементарными частицами такие микрочастицы, внутреннюю структуру которых на современном уровне развития физики нельзя представить как объединение других частиц. Во всех наблюдавшихся до сих пор явлениях каждая такая частица ведет себя как единое целое. Элементарные частицы могут превращаться одна в другую. Примеры таких превращений встречались нам в предыдущей главе (см. (10.7), (10.14)-(10.16)).

Для того чтобы объяснить свойства и поведение элементарных частиц, их приходится наделить, кроме массы, электрического заряда и спина, рядом дополнительных, характерных для них величин (квантовыми числами), о которых будет сказано ниже.

Известны четыре вида взаимодействия между элементарными частицами: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное (мы перечислили их в порядке убывания интенсивности).

Интенсивность взаимодействия принято характеризовать с помощью так называемой константы взаимодействия, которая представляет собой безразмерный параметр, определяющий вероятность процессов, обусловленных данным видом взаимодействия. Отношение значений констант дает относительную интенсивность соответствующих взаимодействий.

**Сильное взаимодействие.** Этот вид взаимодействия обеспечивает связь нуклонов в ядре. Константа сильного взаимодействия имеет величину порядка 10. Наибольшее расстояние, на котором проявляется сильное взаимодействие (радиус действия $r$), составляет примерно $10^{-13}$ см.

**Электромагнитное взаимодействие.** Константа взаимодействия равна $1/137 \approx 10^{-2}$ (см. формулу (5.37) и следующий за ней текст). Радиус действия не ограничен ($r = \infty$).

**Слабое взаимодействие.** Это взаимодействие ответственно за все виды $\beta$-распада ядер (включая $e$-захват), за многие распады элементарных частиц, а также за все процессы взаимодействия нейтрино с веществом. Константа взаимодействия равна по порядку величины $10^{-14}$. Слабое взаимодействие, как и сильное, является короткодействующим.

**Гравитационное взаимодействие.** Константа взаимодействия имеет значение порядка $10^{-39}$. Радиус действия не ограничен ($r = \infty$). Гравитационное взаимодействие является универсальным, ему подвержены все без исключения элементарные частицы. Однако в процессах микромира гравитационное взаимодействие ощутимой роли не играет.

В табл. 11.1 приведены значения (по порядку величины) константы разных видов взаимодействия. В последнем столбце таблицы указано среднее время жизни

Таблица 11.1

| Вид взаимодействия | Константа взаимодействия | Время жизни, с |
|---|---|---|
| Сильное | 10 | $10^{-23}$ |
| Электромагнитное | $10^{-2}$ | $10^{-16}$ |
| Слабое | $10^{-14}$ | $10^{-8}$ |
| Гравитационное | $10^{-39}$ | — |

частиц, распадающихся за счет данного вида взаимодействия (это время называют также временем распада).

Элементарные частицы обычно подразделяют на четыре класса[1]). К одному из них относится только одна частица — фотон. Второй класс образуют лептоны, третий — мезоны и, наконец, четвертый класс — барионы. Мезоны и барионы часто объединяют в один класс

[1]) Предположительно существует еще один класс частиц — гравитоны (кванты гравитационного поля). Экспериментально эти частицы пока не обнаружены.

сильно взаимодействующих частиц, называемых адронами (греческое «адрос» означает крупный, массивный).

Дадим краткую характеристику перечисленных классов частиц.

1. Фотоны, $\gamma$ (кванты электромагнитного поля), участвуют в электромагнитных взаимодействиях, но не обладают сильным и слабым взаимодействиями.

2. Лептоны получили свое название от греческого слова «лептос», которое означает «легкий». К их числу относятся частицы, не обладающие сильным взаимодействием: электроны ($e^-$, $e^+$), мюоны ($\mu^-$, $\mu^+$), обнаруженный в 1975 г. тяжелый тау-лептон ($\tau^-$, $\tau^+$), а также электронные нейтрино ($\nu_e$, $\widetilde{\nu}_e$), мюонные нейтрино ($\nu_\mu$, $\widetilde{\nu}_\mu$) и тау-нейтрино ($\nu_\tau$, $\widetilde{\nu}_\tau$). Все лептоны имеют спин, равный 1/2, и, следовательно, являются фермионами. Все лептоны обладают слабым взаимодействием. Те из них, которые имеют электрический заряд (т. е. мюоны и электроны), обладают также электромагнитным взаимодействием.

3. Мезоны — сильно взаимодействующие нестабильные частицы, не несущие так называемого барионного заряда (см. ниже). К их числу принадлежат $\pi$-мезоны, или пионы ($\pi^+$, $\pi^-$, $\pi^0$), $K$-мезоны, или каоны ($K^+$, $K^-$, $K^0$, $\widetilde{K^0}$), и эта-мезон ($\eta$).

О $\pi$-мезонах было рассказано в § 10.4. Масса $K$-мезонов составляет примерно $970\, m_e$ (494 МэВ для заряженных и 498 МэВ для нейтральных $K$-мезонов). Время жизни $K$-мезонов имеет величину порядка $10^{-8}$ с. Они распадаются с образованием $\pi$-мезонов и лептонов или только лептонов. Масса эта-мезона равна 549 МэВ ($1074 m_e$), время жизни порядка $10^{-19}$ с. Эта-мезоны распадаются с образованием $\pi$-мезонов и $\gamma$-фотонов.

В отличие от лептонов мезоны обладают не только слабым (и, если они заряжены, электромагнитным), но также и сильным взаимодействием, проявляющимся при взаимодействии их между собой, а также при взаимодействии между мезонами и барионами. Спин всех мезонов равен нулю, так что они являются бозонами.

4. Класс барионов объединяет в себе нуклоны ($p$, $n$) и нестабильные частицы с массой, большей массы нуклонов, получившие название гиперонов ($\Lambda$, $\Sigma^+$, $\Sigma^0$, $\Sigma^-$, $\Xi^0$, $\Xi^-$, $\Omega^-$). Все барионы обладают сильным взаимодействием и, следовательно, активно взаимодействуют с атом-

ными ядрами. Спин всех барионов равен 1/2, так что барионы являются фермионами. За исключением протона, все барионы нестабильны [2]). При распаде бариона наряду с другими частицами обязательно образуется барион. Эта закономерность является одним из проявлений закона сохранения барионного заряда, о котором будет речь в § 11.4.

Кроме перечисленных выше частиц, обнаружено большое число сильно взаимодействующих короткоживущих частиц, которые получили название резонансов. Эти частицы представляют собой резонансные состояния, образованные двумя или большим числом элементарных частиц. Время жизни резонансов составляет всего лишь $10^{-23}$ - $10^{-22}$ с. Некоторые из резонансов являются бозонами и должны быть отнесены к классу мезонов. Другие резонансы — фермионы и должны быть причислены к классу гиперонов. В дальнейшем вопроса о резонансах мы касаться не будем.

## 11.2. Методы регистрации элементарных частиц

Элементарные частицы, а также сложные микрочастицы ($\alpha$, $d$ и т. п.) удается наблюдать благодаря тем следам, которые они оставляют при своем прохождении через вещество. Характер следов позволяет судить о знаке заряда частицы, ее энергии, импульсе и т. п. Заряженные частицы вызывают ионизацию молекул на своем пути. Нейтральные частицы следов не оставляют, но они могут обнаружить себя в момент распада на заряженные частицы или в момент столкновения с каким-либо ядром. Следовательно, в конечном счете нейтральные частицы также обнаруживаются по ионизации, вызванной порожденными ими заряженными частицами.

Приборы, применяемые для регистрации ионизирующих частиц, подразделяются на две группы. Первую группу образуют устройства, которые регистрируют факт пролета частицы и, кроме того, позволяют в некоторых случаях судить об ее энергии. Ко второй группе относятся трековые приборы, т. е. приборы, позволяющие наблюдать следы (треки) частиц в веществе.

---

[2]) В последнее время возникло сомнение в абсолютной стабильности протона.

К числу регистрирующих приборов относятся **ионизационные камеры** и **газоразрядные счетчики** (см. § 12.3 кн. 2), а также **черенковские счетчики** (см. § 7.6 кн. 4), **сцинтилляционные счетчики** и **полупроводниковые счетчики**.

Действие сцинтилляционных счетчиков основано на том, что заряженная частица, пролетающая через вещество, вызывает не только ионизацию, но и возбуждение атомов. Возвращаясь в нормальное состояние, атомы испускают видимый свет. Вещества, в которых заряженные частицы возбуждают заметную световую вспышку (сцинтилляцию), называют **фосфо́рами**. Сцинтилляционный счетчик состоит из фосфо́ра, от которого свет подается по специальному светопроводу к фотоумножителю. Импульсы, получающиеся на выходе фотоумножителя, подвергаются счету. Определяется также амплитуда импульсов (которая пропорциональна интенсивности световых вспышек), что дает дополнительную информацию о регистрируемых частицах.

Полупроводниковый счетчик представляет собой полупроводниковый диод, на который подается напряжение такого знака, что основные носители тока оттягиваются от переходного слоя. Следовательно, в нормальном состоянии диод заперт. При прохождении через переходный слой быстрая заряженная частица порождает электроны и дырки, которые отсасываются к электродам. В результате возникает электрический импульс, пропорциональный количеству порожденных частицей носителей тока.

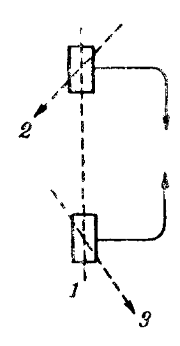


Рис. 11.1

Счетчики часто объединяют в группы и включают так, чтобы регистрировались только такие события, которые отмечаются одновременно несколькими приборами либо, напротив, только одним из них. В первом случае говорят, что счетчики включены по **схеме совпадений**, во втором — по **схеме антисовпадений**. Применяя различные схемы включений, можно из множества явлений выделить то, которое представляет интерес. Например, два счетчика (рис. 11.1), установленные один за другим и включенные по схеме совпадений, зарегистрируют летящую вдоль их совместной оси частицу *1* и не зарегистрируют частиц *2* и *3*.

К числу трековых приборов относятся камеры Вильсона, диффузионные камеры, пузырьковые камеры, искровые камеры и эмульсионные камеры.

**Камера Вильсона.** Этот прибор создан Вильсоном[3]) в 1912 г. Дорожка из ионов, проложенная летящей заряженной частицей, становится видимой в камере Вильсона, потому что на ионах происходит конденсация пересыщенных паров какой-либо жидкости. Прибор работает не непрерывно, а циклами. Сравнительно короткое (0,1–1 с) время чувствительности камеры чередуется с мертвым временем (в 100–1000 раз бо́льшим), в течение которого камера готовится к следующему рабочему циклу. Пересыщение достигается за счет внезапного охлаждения, вызываемого резким (адиабатическим) расширением рабочей смеси, состоящей из неконденсирующегося газа (гелия, азота, аргона) и паров воды, этилового спирта и т. п. В этот же момент производится стереоскопическое (т. е. с нескольких точек) фотографирование рабочего объема камеры. Стереофотографии позволяют воссоздать пространственную картину зафиксированного явления. Так как отношение времени чувствительности к мертвому времени очень мало, приходится иногда делать десятки тысяч снимков, прежде чем будет зафиксировано какое-либо событие, обладающее небольшой вероятностью. Чтобы увеличить вероятность наблюдения редких явлений, используются управляемые камеры Вильсона, у которых работой расширительного механизма управляют счетчики частиц, включенные в электронную схему, выделяющую нужное событие.

Если поместить камеру Вильсона между полюсами электромагнита, ее возможности сильно расширяются. По искривлению траектории, вызываемому действием магнитного поля, удается определить знак заряда частицы и ее импульс. В качестве примера фотографии, полученной с помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле, может служить рис. 11.7 (см. далее), на котором видны треки электрона и позитрона.

**Диффузионная камера.** Как и в камере Вильсона, рабочим веществом в диффузионной камере является пересыщенный пар. Однако состояние пересыщения создается

---

[3]) Чарлз Томсон Рис Вильсон (1869–1959) — английский физик.

не адиабатическим расширением, а в результате диффузии паров спирта от находящейся при температуре порядка 10 °C крышки камеры к охлаждаемому твердой углекислотой (температура −70 °C) дну. Недалеко от дна возникает слой пересыщенного пара, имеющий толщину несколько сантиметров. В этом слое и образуются треки. В отличие от камеры Вильсона диффузионная камера работает непрерывно.

**Пузырьковая камера.** В изобретенной Глезером[4]) в 1952 г. пузырьковой камере пересыщенные пары заменены прозрачной перегретой жидкостью (т. е. жидкостью, находящейся под внешним давлением, меньшим давления ее насыщенных паров; см. § 6.5 кн. 3). Пролетевшая через камеру ионизирующая частица вызывает бурное вскипание жидкости, вследствие чего след частицы оказывается обозначенным цепочкой пузырьков пара — образуется трек. Пузырьковая камера, как и камера Вильсона, работает циклами. Запускается камера резким снижением (сбросом) давления, вследствие чего рабочая жидкость переходит в метастабильное перегретое состояние. В качестве рабочей жидкости, которая одновременно служит мишенью для пролетающих через нее частиц, применяются водород, ксенон, пропан ($C_3H_8$) и некоторые другие вещества. Рабочий объем камер достигает 30 м$^3$.

**Искровая камера.** В 1957 г. Краншау и де Биром был сконструирован прибор для регистрации траекторий заряженных частиц, названный искровой камерой. Прибор состоит из системы плоских параллельных друг другу металлических электродов (рис. 11.2). Электроды соединяются через один. Одна группа электродов заземляется, а на другую периодически подается кратковременный (длительностью $10^{-7}$ с) высоковольтный импульс (10–15 кВ). Если в момент подачи импульса через камеру про-

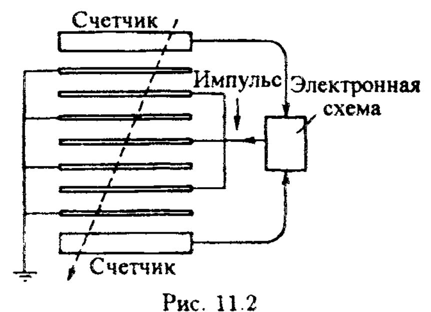


Рис. 11.2

[4]) Дональд Артур Глезер (р. в 1926 г.) — американский физик.

летит ионизирующая частица, ее путь будет отмечен цепочкой искр, проскакивающих между электродами. Прибор запускается автоматически с помощью включенных по схеме совпадений дополнительных счетчиков, регистрирующих прохождение через рабочий объем камеры исследуемых частиц.

Более совершенной разновидностью искровой камеры является стримерная камера. В этой камере высокое напряжение снимается раньше, чем успевает развиться полностью искра. Поэтому возникают лишь зародышевые искры, которые образуют отчетливый след.

**Эмульсионная камера.** Советские физики Л.В. Мысовский[5]) и А.П. Жданов впервые применили для регистрации микрочастиц фотопластинки. Заряженные частицы оказывают на фотографическую эмульсию такое же действие, как и фотоны. Поэтому после проявления пластинки в эмульсии образуется видимый след (трек) пролетевшей частицы. Недостатком метода фотопластинок была малая толщина эмульсионного слоя, вследствие чего получались полностью лишь треки частиц, летящих параллельно плоскости слоя. В эмульсионных камерах облучению подвергаются толстые пачки (весом до нескольких десятков килограммов и толщиной несколько сотен миллиметров), составленные из отдельных слоев фотоэмульсии (без подложки). После облучения пачка разбирается на слои, каждый из которых проявляется и просматривается под микроскопом. Для того чтобы можно было проследить путь частицы при переходе из одного слоя в другой, перед разборкой пачки на все слои наносится с помощью рентгеновских лучей одинаковая координатная сетка. Получающиеся таким способом треки частиц показаны на рис. 11.3, на котором зафиксировано последовательное превращение $\pi$-мезона в мюон и затем в позитрон.

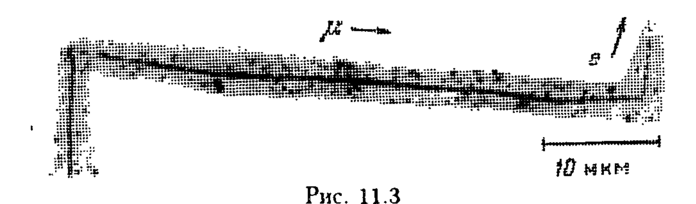



Рис. 11.3

[5]) Лев Владимирович Мысовский (1888–1939).

## 11.3. Космические лучи

До создания мощных ускорителей заряженных частиц космическое излучение было единственным источником частиц с энергией, достаточной для образования мезонов и гиперонов. Позитрон, мюоны, $\pi$-мезоны и многие странные частицы (см. § 11.6) были обнаружены в составе космических лучей.

Различают первичные и вторичные космические лучи. Первичные лучи представляют собой непрерывно падающий на Землю поток атомных ядер (в основном протонов) высокой энергии (в среднем около 10 ГэВ, энергия отдельных частиц достигает $10^{10}$ ГэВ [6])). Частицы первичных космических лучей претерпевают неупругие столкновения с ядрами атомов в верхних слоях атмосферы, в результате чего возникает вторичное излучение. На высотах ниже 20 км космические лучи практически полностью носят вторичный характер. Во вторичном излучении встречаются все известные в настоящее время элементарные частицы.

Интенсивность первичных космических лучей на границе атмосферы (т. е. на высоте 50 км) составляет примерно 1 част./(см$^2$·с). Поток заряженных частиц на уровне моря равен в среднем $2 \cdot 10^{-2}$ част./(см$^2$·с). Существование магнитного поля Земли приводит к тому, что интенсивность космических лучей меняется с широтой. Это явление называется широтным эффектом.

С помощью приборов, установленных на искусственных спутниках Земли и космических ракетах, были открыты вблизи Земли радиационные пояса, которые представляют собой две окружающие Землю зоны с резко повышенной интенсивностью ионизирующего излучения. Их существование обусловлено захватом и удержанием заряженных космических частиц магнитным полем Земли. В плоскости экватора внутренний пояс радиации простирается от 600 до 6000 км, внешний пояс — от 20 000 до 60 000 км. На широтах 60–70° оба пояса приближаются к Земле на расстояние несколько сот километров.

В составе вторичных космических лучей имеются две компоненты. Одна из них сильно поглощается свинцом и поэтому была названа мягкой; вторая же проникает через большие толщи свинца и получила название жесткой.

---

[6]) Напомним, что 1 ГэВ (гигаэлектронвольт) равен $10^9$ эВ.

Мягкая компонента состоит из каскадов, или ливней, электронно-позитронных пар. Возникший в результате распада $\pi^0$-мезона (см. (10.15)) или резкого торможения быстрого электрона $\gamma$-фотон, пролетая вблизи атомного ядра, создает электронно-позитронную пару (рис. 11.4). Торможение этих частиц снова приводит к образованию $\gamma$-фотонов и т. д. Процессы рождения пар и возникновения $\gamma$-квантов чередуются друг с другом до тех пор, пока энергия $\gamma$-фотонов не станет недостаточной для образования пар. Поскольку энергия первоначального фотона бывает очень большой, успевает возникнуть много поколений вторичных частиц, прежде чем прекращается развитие ливня.

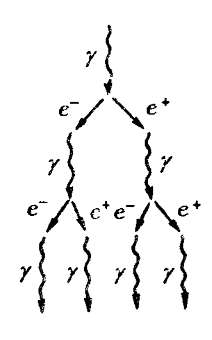


Рис. 11.4

Жесткая, проникающая компонента космических лучей состоит в основном из мюонов. Ее образование происходит преимущественно в верхних и средних слоях атмосферы за счет распада заряженных $\pi$-мезонов (см. (10.14)).

С появлением ускорителей, позволяющих ускорять частицы до энергий в сотни гигаэлектронвольт (см. § 10.5 кн. 2), космические лучи утратили свое исключительное значение при изучении элементарных частиц. Однако они по-прежнему остаются единственным источником частиц сверхвысоких энергий.

## 11.4. Частицы и античастицы

Уравнение Шрёдингера не удовлетворяет требованиям теории относительности — оно не инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца. В 1928 г. П. Дираку удалось найти релятивистское квантово-механическое уравнение для электрона, из которого вытекает ряд замечательных следствий. Прежде всего из этого уравнения естественным образом, без каких-либо дополнительных предположений, получаются спин и числовое значение собственного магнитного момента электрона. Таким образом, выяснилось, что спин представляет собой величину одновременно и квантовую и релятивистскую.

Но этим не исчерпывается значение уравнения Дирака. Оно позволило также предсказать существование антича-

стицы электрона — позитрона. Из уравнения Дирака получаются для полной энергии свободного электрона не только положительные, но и отрицательные значения. Исследование уравнения показывает, что при заданном импульсе частицы $p$ существуют решения уравнения, соответствующие энергиям

$$E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m_e^2c^4}. \tag{11.1}$$

Между наибольшей отрицательной энергией $(-m_ec^2)$ и наименьшей положительной энергией $(+m_ec^2)$ имеется интервал значений энергии, которые не могут реализоваться. Ширина этого интервала равна $2m_ec^2$ (рис. 11.5). Следовательно, получаются две области собственных значений энергии: одна начинается с $+m_ec^2$ и простирается до $+\infty$, другая начинается с $-m_ec^2$ и простирается до $-\infty$.

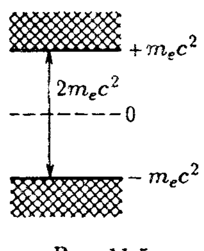


Рис. 11.5

В неквантовой релятивистской механике энергия выражается через импульс с помощью соотношения, совпадающего с (11.1) (см. формулу (6.57) кн. 1), так что формально также может иметь отрицательные значения. Однако в неквантовой теории энергия изменяется непрерывно и поэтому не может пересечь запрещенную зону и перейти от положительных значений к отрицательным. В квантовой теории энергия может изменяться не только непрерывно, но и скачком, так что существование запрещенной зоны не может воспрепятствовать переходу частицы в состояния с отрицательной энергией (ср. с переходом электрона в полупроводнике из валентной зоны в зону проводимости; см. рис. 8.37).

Частица с отрицательной энергией должна обладать очень странными свойствами. Переходя в состояния со все меньшей энергией (т. е. с увеличивающейся по модулю отрицательной энергией), она могла бы выделять энергию, скажем, в виде излучения, причем, поскольку $|E|$ ничем не ограничен, частица с отрицательной энергией могла бы излучить бесконечно большое количество энергии. К аналогичному выводу можно прийти следующим путем. Из соотношения $E_0 = mc^2$ вытекает, что у частицы с отрицательной энергией масса будет также отрицательной. Под

действием тормозящей силы частица с отрицательной массой должна не замедляться, а ускоряться, совершая над источником тормозящей силы бесконечно большое количество работы.

Ввиду этих трудностей следовало, казалось бы, признать, что состояния с отрицательной энергией нужно исключить из рассмотрения как приводящие к абсурдным результатам. Это, однако, противоречило бы некоторым общим принципам квантовой механики. Поэтому Дирак выбрал другой путь. Он предположил, что переходы электронов в состоянии с отрицательной энергией обычно не наблюдаются по той причине, что все имеющиеся уровни с отрицательной энергией уже заняты электронами. Напомним, что электроны подчиняются принципу Паули, который запрещает находиться в одном и том же состоянии более чем одной частице.

Согласно Дираку вакуум есть такое состояние, в котором все уровни отрицательной энергии заселены электронами, а уровни с положительной энергией свободны (рис. 11.6 а). Поскольку заняты все без исключения уровни,

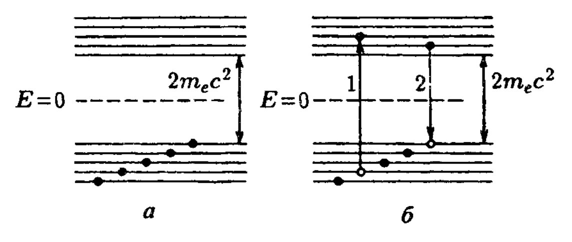



Рис. 11.6

лежащие ниже запрещенной полосы, электроны на этих уровнях никак себя не обнаруживают [7]). Если одному из электронов, находящихся на отрицательных уровнях, сообщить энергию

$$E \geq 2m_ec^2, \tag{11.2}$$

то этот электрон перейдет в состояние с положительной энергией и будет вести себя обычным образом, как частица с положительной массой и отрицательным зарядом. Вакансия («дырка»), образовавшаяся при этом в совокупно-

---

[7]) Подобно этому в диэлектрике электроны, полностью заполняющие валентную зону, никак не реагируют на действие электрического поля.

сти отрицательных уровней, должна вести себя как электрон, имеющий положительный заряд. Действительно, отсутствие частицы, обладающей отрицательными массой и зарядом, будет восприниматься как наличие частицы с положительной массой и положительным зарядом. Эта первая из предсказанных теоретически частиц была названа позитроном.

При встрече позитрона с электроном они аннигилируют (исчезают) — электрон переходит с положительного уровня на вакантный отрицательный[8]). Энергия, соответствующая разности этих уровней, выделяется в виде излучения. На рис. 11.6б стрелка *1* изображает процесс рождения пары электрон–позитрон, а стрелка *2* — их аннигиляцию. Термин «аннигиляция» не следует понимать буквально. По существу происходит не исчезновение, а превращение одних частиц (электрона и позитрона) в другие ($\gamma$-фотоны).

Теория Дирака была настолько «сумасшедшей», что большинство физиков отнеслось к ней весьма недоверчиво. Она получила признание только после того, как в 1932 г. Андерсон[9]) обнаружил позитрон в составе космических лучей. В камере Вильсона, помещенной между полюсами электромагнита, позитрон оставлял такой же след, как и рождавшийся одновременно с ним электрон, только этот след был закручен в противоположную сторону (рис. 11.7).

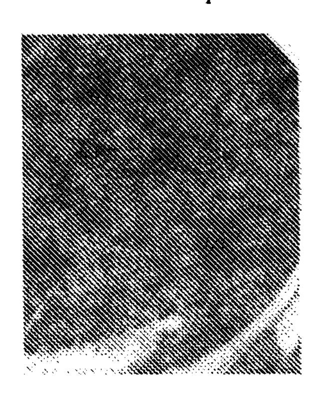


Рис. 11.7

Рождение электронно-позитронных пар происходит при прохождении $\gamma$-фотонов через вещество. Это — один из основных процессов, приводящих к поглощению $\gamma$-лучей веществом. В полном соответствии с теорией Дирака минимальная энергия $\gamma$-фотона, при которой наблюдается рождение пар, оказывается равной $2m_ec^2 = 1,02$ МэВ (см. (11.2)). Для соблюдения закона сохранения импульса в процессе рождения пары должна

---

[8]) Этот процесс аналогичен рекомбинации электрона и дырки в полупроводнике.

[9]) Карл Дэвид Андерсон (р. в 1905 г.) — американский физик.

участвовать еще одна частица (электрон или ядро), которая воспринимает избыток импульса $\gamma$-фотона над суммарным импульсом электрона и позитрона. Следовательно, схема рождения имеет вид

$$\gamma + e^- \to e^- + e^- + e^+ \tag{11.3}$$

либо

$$\gamma + \mathrm{X} \to \mathrm{X} + e^- + e^+, \tag{11.4}$$

где X — ядро, в силовом поле которого происходит рождение пары.

Электронно-позитронные пары могут также возникать при столкновениях между двумя заряженными частицами, например электронами:

$$e^- + e^- \to e^- + e^- + e^- + e^+. \tag{11.5}$$

При аннигиляции требования закона сохранения импульса удовлетворяются тем, что возникают два (реже три) $\gamma$-фотона, разлетающихся в разные стороны

$$e^- + e^+ \to \gamma + \gamma(+\gamma). \tag{11.6}$$

Доля энергии, получаемая ядром X в ходе процесса (11.4), столь мала, что порог реакции образования пар (т. е. необходимая для этого минимальная энергия $\gamma$-фотона) практически равен $2m_ec^2$. Порог реакции (11.3) составляет $4m_ec^2$, а реакции (11.5) — $7m_ec^2$ (в последнем случае под порогом реакции подразумевается минимальная суммарная энергия сталкивающихся электронов). Таким образом, требования одновременного сохранения энергии и импульса приводят к тому, что порог реакции (минимальная энергия исходных частиц) может оказаться заметно больше, чем суммарная энергия покоя рождающихся частиц.

В несколько измененном виде уравнение Дирака применимо не только к электронам, но и к другим частицам со спином, равным 1/2. Следовательно, для каждой такой частицы (например, протона и нейтрона) должна существовать античастица[10]. По аналогии с (11.5) рождения пары протон–антипротон ($p$–$\tilde{p}$) или нейтрон–антинейтрон

[10]) Античастицу обозначают той же буквой, что и соответствующую ей частицу, с добавлением тильды (~) или прямой черточки, поставленной над этой буквой. Так, например, антипротон обозначают символом $\tilde{p}$ или $\bar{p}$.

($n$–$\tilde{n}$) можно было ожидать при столкновении нуклонов достаточно большой энергии. Суммарная энергия покоя протона и антипротона, как и нейтрона и антинейтрона, составляет почти 2 ГэВ (см. (10.1) и (10.5)). Определяемый требованиями сохранения энергии и импульса порог реакции равен 5,6 ГэВ. В 1955 г. в г. Беркли (США) был запущен ускоритель (синхрофазотрон; см. § 10.5 кн. 2), позволявший ускорять протоны до энергии 6,3 ГэВ. Облучая пучком ускоренных протонов медную мишень, Чемберлен [11]), Сегре [12]), К. Виганд и П. Ипсилантис наблюдали образование пары $p$–$\tilde{p}$. Реакция протекала по одной из следующих схем:

$$p+p \to p+p+p+\tilde{p} \quad \text{или} \quad p+n \to p+n+p+\tilde{p}. \tag{11.7}$$

Второй из нуклонов в левой части входит в состав ядра Cu. Поскольку нуклоны в ядре находятся в движении, пороговая энергия ударяющей частицы составляет в этом случае приблизительно 4,3 ГэВ.

Антипротон отличается от протона знаком электрического заряда и собственного магнитного момента (у антипротона магнитный момент отрицателен, т. е. направлен противоположно механическому моменту). Главное же, что отличает антипротон от протона (и вообще частицу от античастицы), заключается в их способности к взаимной аннигиляции, в результате которой возникают другие частицы. Антипротон может аннигилировать при встрече не только с протоном, но и с нейтроном. Совокупность возникающих частиц в отдельных актах аннигиляции различна. Например, возможны процессы:

$$\begin{gathered}\tilde{p}+p \to \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0,\\ \tilde{p}+p \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0 + \pi^0,\\ \tilde{p}+n \to \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0 + \pi^0.\end{gathered} \tag{11.8}$$

В 1956 г. на том же ускорителе в Беркли Б. Корком, Г. Ламбертсоном, О. Пиччиони и В. Вентцелем были наблюдены антинейтроны, которые получались перезарядкой антипротонов, т. е. в результате процессов

$$\begin{gathered}\tilde{p}+p \to \tilde{n}+n,\\ \tilde{p}+n \to \tilde{n}+n+\pi^-.\end{gathered} \tag{11.9}$$

[11]) Оуэн Чемберлен (р. в 1920 г.) — американский физик.

[12]) Эмилио Сегре (р. в 1905 г.) — итальянский физик.

Антинейтрон отличается от нейтрона знаком собственного магнитного момента (у антинейтрона направление магнитного момента совпадает с направлением механического момента) и способностью аннигилировать при встрече с нуклоном (нейтроном или протоном). В результате аннигиляции рождаются новые частицы (главным образом $\pi$-мезоны).

Античастицы имеются не только у фермионов, но и у бозонов. Так, например, $\pi^-$-мезон является античастицей по отношению к $\pi^+$-мезону.

Существуют частицы, которые тождественны со своими античастицами (т. е. не имеют античастиц). Такие частицы называются абсолютно нейтральными. К их числу принадлежат фотон, $\pi^0$-мезон и $\eta$-мезон. Частицы, тождественные со своими античастицами, не способны к аннигиляции. Это, однако, не означает, что они вообще не могут превращаться в другие частицы.

Если барионам (т. е. нуклонам и гиперонам) приписать барионный заряд[13]) (или барионное число) $B = +1$, антибарионам — барионный заряд $B = -1$, а всем остальным частицам — барионный заряд $B = 0$, то для всех процессов, протекающих с участием барионов и антибарионов (например, для (11.7)–(11.9)), будет характерно сохранение барионного заряда, подобно тому как для процессов (11.3)–(11.6) характерно сохранение электрического заряда.

Закон сохранения барионного заряда обусловливает стабильность самого легкого из барионов — протона. Другие законы сохранения (энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и т. п.) не запрещают, например, процесса

$$p \to e^+ + \nu + \widetilde{\nu}, \tag{11.10}$$

который в конечном итоге привел бы к аннигиляции атомов. Однако такой процесс сопровождался бы уменьшением барионного заряда на единицу и поэтому не наблюдается. Аналогично закон сохранения электрического заряда обусловливает стабильность самой легкой заряженной частицы – электрона, запрещая, например, процесс

$$e^- \to \gamma + \gamma + \nu. \tag{11.11}$$

[13]) Барионный заряд есть одно из тех квантовых чисел, о которых говорится во втором абзаце § 11.1.

Для объяснения особенностей протекания процессов с участием лептонов и антилептонов приходится ввести квантовое число $L$, получившее название лептонного заряда (или лептонного числа). Лептонам приписывается $L = +1$, антилептонам $L = -1$, всем остальным частицам $L = 0$. При этом условии во всех без исключения процессах наблюдается сохранение суммарного лептонного заряда рассматриваемой физической системы.

Преобразование всех величин, описывающих физическую систему, при котором все частицы заменяются античастицами (например, электроны позитронами, а позитроны электронами и т. д.), называется зарядовым сопряжением. Какую из двух зарядово-сопряженных частиц считать частицей, а какую — античастицей, является, вообще говоря, делом чисто условным. Однако, сделав выбор для одной пары зарядово-сопряженных частиц, выбор для других пар нужно делать так, чтобы в наблюдавшихся взаимодействиях сохранялись барионный и лептонный заряды. Принято считать электрон и протон частицами, а позитрон и антипротон — античастицами. При этом условии выбор для остальных барионов и лептонов делается однозначным. Так, например, для сохранения барионного заряда в ходе процесса (10.7) необходимо считать частицей нейтрон. Результаты, к которым приводит учет требований сохранения $B$ и $L$ для других частиц, приведены в табл. 11.2.

В табл. 11.2 указаны все обнаруженные до 1977 г. частицы, за исключением резонансов. В первом столбце даны названия частиц. В тех случаях, когда античастица обозначается с помощью тильды (~) или черточки (–), название античастицы получается путем добавления к названию частицы приставки «анти». Например, частица — ламбда-гиперон, античастица — антиламбда-гиперон. Античастица электрона называется позитроном. В остальных случаях названия частицы и античастицы различаются добавлением слов «плюс» или «минус». Например, частица — пи-плюс-мезон, античастица — пи-минус-мезон[14]). Во втором и третьем столбцах даны символы частицы и античастицы. Символы абсолютно нейтральных частиц проставлены в разрывах черты, разделяющей столбцы частиц и античастиц. В четвертом и пятом столб-

[14]) Вместо $\pi^+$-мезон и $\pi^-$-мезон, а также $K^+$-мезон и $K^-$-мезон употребляются названия положительный и отрицательный пион, а также положительный и отрицательный каон.

Таблица 11.2

| Частица | Античастица | $m$, МэВ | $\tau$, с | Схема распада |
|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | | 0 | стабилен | |
| | | ЛЕПТОНЫ | | |
| $e^-$ | $e^+$ | 0,511 | стабилен | |
| $\nu_e$ | $\widetilde{\nu}_e$ | 0 (?) | стабильно | |
| $\mu^-$ | $\mu^+$ | 106 | $2,2 \cdot 10^{-6}$ | $e^- + \widetilde{\nu}_e + \nu_\mu$ |
| $\nu_\mu$ | $\widetilde{\nu}_\mu$ | 0 (?) | стабильно | |
| $\tau^-$ | $\tau^+$ | 1782 | $3,4 \cdot 10^{-13}$ | $e^- + \widetilde{\nu}_e + \nu_\tau$; $\mu^- + \widetilde{\nu}_\mu + \nu_\tau$; $\pi^- + \nu_\tau$ |
| $\nu_\tau$ | $\widetilde{\nu}_\tau$ | ? | ? | |
| | | МЕЗОНЫ | | |
| $\pi^+$ | $\pi^-$ | 140 | $2,6 \cdot 10^{-8}$ | $\mu^+ + \nu_\mu$ |
| $\pi^0$ | | 135 | $0,8 \cdot 10^{-16}$ | $\gamma + \gamma$; $e^+ + e^- + \gamma$ |
| $K^+$ | $K^-$ | 494 | $1,2 \cdot 10^{-8}$ | $\mu^+ + \nu_\mu$; $\pi^+ + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ |
| $K^0$ | $\widetilde{K}^0$ | 498 | $0,9 \cdot 10^{-10}$ $5 \cdot 10^{-8}$ | $\pi^+ + \pi^-$; $\pi^0 + \pi^0$; $\pi^+ + e^- + \widetilde{\nu}_e$; $\pi^- + e^+ + \nu_e$ |
| $\eta$ | | 549 | $7 \cdot 10^{-19}$ | $\gamma + \gamma$; $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$; $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ |
| | | БАРИОНЫ | | |
| $p$ | $\widetilde{p}$ | 938,3 | стабилен (?) | |
| $n$ | $\widetilde{n}$ | 939,6 | 918 | $p + e^- + \widetilde{\nu}_e$ |
| $\Lambda$ | $\widetilde{\Lambda}$ | 1116 | $2,6 \cdot 10^{-10}$ | $p + \pi^-$; $n + \pi^0$ |
| $\Sigma^+$ | $\widetilde{\Sigma}^+$ | 1189 | $0,8 \cdot 10^{-10}$ | $p + \pi^0$; $n + \pi^+$ |
| $\Sigma^0$ | $\widetilde{\Sigma}^0$ | 1192 | $5,8 \cdot 10^{-10}$ | $\Lambda + \gamma$ |
| $\Sigma^-$ | $\widetilde{\Sigma}^-$ | 1197 | $1,5 \cdot 10^{-10}$ | $n + \pi^-$ |
| $\Xi^0$ | $\widetilde{\Xi}^0$ | 1315 | $2,9 \cdot 10^{-10}$ | $\Lambda + \pi^0$ |
| $\Xi^-$ | $\widetilde{\Xi}^-$ | 1321 | $1,6 \cdot 10^{-10}$ | $\Lambda + \pi^-$ |
| $\Omega^-$ | $\widetilde{\Omega}^-$ | 1672 | $0,8 \cdot 10^{-10}$ | $\Xi^0 + \pi^-$, $\Xi^- + \pi^0$; $\Lambda + K^-$ |

**Название частиц:** $e^-$ — электрон, $\nu_e$ — электронное нейтрино, $\mu^-$ — мюон, $\nu_\mu$ — мюонное нейтрино, $\tau^-$ — тяжелый лептон, $\nu_\tau$ — тау-нейтрино, $\pi^+$ — пи-плюс-мезон, $\pi^0$ — пи-нуль-мезон, $K^+$ — ка-плюс-мезон, $K^0$ — ка-нуль-мезон, $\eta$ — эта-мезон, $p$ — протон, $n$ — нейтрон, $\Lambda$ — ламбда-гиперон, $\Sigma^+$ — сигма-плюс-гиперон, $\Sigma^0$ — сигма-нуль-гиперон, $\Sigma^-$ — сигма-минус-гиперон, $\Xi^0$ — кси-нуль-гиперон, $\Xi^-$ — кси-минус-гиперон, $\Omega^-$ — омега-минус-гиперон.

цах приведены масса частицы $m$ и среднее время жизни частицы $\tau$. Наконец, в последнем столбце указаны основные схемы распада частиц. Чтобы получить схему распада античастицы, нужно заменить частицы античастицами, а античастицы — частицами. Например, схема распада положительного мюона имеет вид $e^+ + \nu_e + \widetilde{\nu}_\mu$.

Теперь мы имеем возможность объяснить, почему частицу, возникающую при распадах (10.7) и (10.26), следует называть антинейтрино, а возникающую при распаде (10.27) — нейтрино. Это вытекает из требования сохранения лептонного заряда. У электрона и нейтрино $L = +1$, а у позитрона и антинейтрино $L = -1$. Поэтому суммарный лептонный заряд не изменяется, если электрон возникает вместе с антинейтрино, а позитрон — вместе с нейтрино.

Приписав электрону $L = +1$, мы должны в соответствии со схемой распада (10.16) отрицательному мюону также приписать $L = +1$, т. е. считать $\mu^-$-частицей, а положительный мюон рассматривать как античастицу и приписывать ему значение $L = -1$. Легко убедиться в том, что в процессах распада $\pi$-мезонов (см. формулу (10.14)) также сохраняется лептонный заряд.

## 11.5. Изотопический спин

Из зарядовой независимости ядерных сил (см. § 10.4) вытекает, что протон и нейтрон обнаруживают гораздо больше сходства, чем различий. В сильном взаимодействии они участвуют равным образом, спин обеих частиц одинаков, массы очень близки. Это дает основание рассматривать протон и нейтрон как два различных состояния одной и той же частицы — нуклона. Если «выключить» электромагнитное взаимодействие, то оба эти состояния полностью совпадут (небольшое различие масс протона и нейтрона обусловлено электромагнитным взаимодействием).

Обратимся к схеме уровней атома натрия (см. рис. 5.6). Напомним, что мультиплетная структура уровней обусловлена взаимодействием между спиновым и орбитальным моментами электронов. «Выключение» спин-орбитального взаимодействия привело бы к исчезновению различия между, например, уровнями $3^2P_{1/2}$ и $3^2P_{3/2}$ и слиянию их в один уровень $3P$. Включение спин-орбитального взаимодействия, напротив, приводит к образованию мультипле-

тов, подобно тому как включение электромагнитного взаимодействия приводит к возникновению различий между протоном и нейтроном. Эта аналогия послужила основанием для того, чтобы назвать протон и нейтрон **зарядовым мультиплетом** (дублет). Другие частицы также объединяются в зарядовые мультиплеты. Так, например, $\Lambda$-гиперон образует синглет (см. табл. 11.2), а $\pi$-мезоны — триплет (при выключении электромагнитного взаимодействия все три $\pi$-мезона становятся неразличимыми).

Каждому спектральному мультиплету соответствует определенное значение спина $S$ (число компонент в мультиплете равно $2S+1$). Отдельные компоненты мультиплета различаются значениями проекции спина на ось $z$. По аналогии с обычным спином каждому зарядовому мультиплету приписывается определенное значение **изотопического спина**[15]) $T$, выбранное так, чтобы $2T+1$ было равно числу частиц в мультиплете. Отдельным частицам приписываются различные значения $T_z$ — проекции изотопического спина на ось $z$ в воображаемом **изотопическом пространстве**. Например, для нуклонов $T = 1/2$, протону соответствует $T_z = +1/2$, нейтрону $T_z = -1/2$. Для $\pi$-мезонов $T = 1$, проекции $T_z$ равны $+1$, 0 и $-1$ для $\pi^+$-, $\pi^0$- и $\pi^-$-мезона соответственно.

Во избежание недоразумений отметим, что квантовое число $T$, названное изотопическим спином, не имеет никакого отношения ни к изотопам, ни к обычному спину. Слово «изотопический» появилось в названии квантового числа $T$ потому, что протон и нейтрон образуют различные «разновидности» нуклона, подобно тому как действительные изотопы образуют разновидности данного химического элемента. Слово «спин» появилось в названии вследствие того, что математический аппарат, описывающий квантовое число $T$, оказался точно таким, как и математический аппарат обычного спина. В остальном между изотопическим и обычным спинами нет ничего общего.

В табл. 11.3 приведены значения $T$ и $T_z$ различных частиц. Каждая строка в этой таблице дает зарядовый мультиплет. Следовательно, если, например, для нуклона имеется две строки, то это означает, что нуклоны образуют два зарядовых мультиплета.

---

[15]) Изотопический спин был впервые введен в рассмотрение В. Гейзенбергом в 1932 г. для описания протона и нейтрона как различных состояний нуклона.

Таблица 11.3

| Частица | Изотопический спин $T$ | Проекция изотопического спина $T_z$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 |
| $\pi$-мезон | 1 | $\pi^-$ | | $\pi^0$ | | $\pi^+$ |
| $K$-мезон | 1/2<br>1/2 | | $K_0$<br>$K^-$ | | $K^+$<br>$\tilde{K}^0$ | |
| $\eta$-мезон | 0 | | | $\eta$ | | |
| Нуклон | 1/2<br>1/2 | | $n$<br>$\tilde{p}$ | | $p$<br>$\tilde{n}$ | |
| $\Lambda$-гиперон | 0<br>0 | | | $\Lambda$<br>$\tilde{\Lambda}$ | | |
| $\Sigma$-гиперон | 1<br>1 | $\Sigma^-$<br>$\tilde{\Sigma}^+$ | | $\Sigma^0$<br>$\tilde{\Sigma}^0$ | | $\Sigma^+$<br>$\tilde{\Sigma}^-$ |
| $\Xi$-гиперон | 1/2<br>1/2 | | $\Xi^-$<br>$\tilde{\Xi}^0$ | | $\Xi^0$<br>$\tilde{\Xi}^+$ | |
| $\Omega$-гиперон | 0<br>0 | | | $\Omega^-$<br>$\tilde{\Omega}^-$ | | |

Рассмотрим два зарядовых мультиплета, отличающихся тем, что частицы, образующие один мультиплет, являются античастицами по отношению к частицам, входящим в другой мультиплет. Изотопические спины обоих мультиплетов, очевидно, одинаковы ($2T+1$ дает число частиц в мультиплете). Что касается проекций изотопического спина $T_z$, то для частицы и античастицы они различаются знаком. Так, для протона $T_z = +1/2$, для антипротона $T_z = -1/2$, для нейтрона $T_z = -1/2$, для антинейтрона $T_z = +1/2$.

На первый взгляд может показаться странным, что в случае $\pi$-мезонов в одном зарядовом мультиплете объединяются и частица ($\pi^+$), и ее античастица ($\pi^-$), в то время как, например, $\Lambda$-гиперон и анти-$\Lambda$-гиперон образуют два различных зарядовых мультиплета. Объяснение заключается в том, что в зарядовый мультиплет объединяются частицы, различающиеся только величиной или знаком электрического заряда; все остальные величины, характе-

ризующие частицы, должны быть одинаковыми[16]). Гипероны $\Lambda$ и $\tilde{\Lambda}$ различаются значением барионного числа и поэтому не могут входить в один мультиплет. Барионное число всех $\pi$-мезонов равно нулю, остальные квантовые числа также одинаковы; следовательно, нет никаких препятствий для объединения их в одном мультиплете.

С изотопическим спином связан закон сохранения. При сильных взаимодействиях сохраняется как изотопический спин $T$, так и его проекция $T_z$. При электромагнитных взаимодействиях сохраняется только $T_z$, сам же изотопический спин $T$ не сохраняется. Слабые взаимодействия протекают, как правило, с изменением изотопического спина.

Понятие изотопического спина оказалось весьма плодотворным. Оно сыграло большую роль в установлении систематики элементарных частиц. В частности, оно натолкнуло Гелл-Манна[17]) и независимо от него Нишиджиму[18]) на мысль объединить частицы в зарядовые мультиплеты и привело затем к понятию странности (см. следующий параграф).

## 11.6. Странные частицы

$K$-мезоны и гипероны ($\Lambda$, $\Sigma$, $\Xi$) были обнаружены в составе космических лучей в начале 50-х годов. Начиная с 1953 г. их получают на ускорителях. Поведение этих частиц оказалось столь необычным, что они были названы странными.

Необычность поведения странных частиц заключалась в том, что рождались они явно за счет сильных взаимодействий с характерным временем порядка $10^{-23}$ с, а времена жизни их оказались порядка $10^{-8}$ - $10^{-10}$ с. Последнее обстоятельство указывало на то, что распад частиц осуществляется в результате слабых взаимодействий. Было совершенно непонятно, почему странные частицы живут так долго, что мешает им распадаться за счет сильного взаимодействия, в результате которого они возникают. Напри-

---

[16]) Различие заряженных и нейтральных частиц, обусловленное электромагнитным взаимодействием, например небольшое различие в массе, не принимается во внимание.

[17]) Мюррей Гелл-Манн (р. в 1929 г.) — американский физик.

[18]) Кацухико Нишиджима (р. в 1926 г.) — японский физик.

мер, один из процессов рождения странных частиц имеет вид

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda, \qquad (11.12)$$

а распад $\Lambda$-гиперона идет по схеме

$$\Lambda \to \pi^- + p \qquad (11.13)$$

(см. приведенную на рис. 11.8 фотографию треков частиц, полученную в пузырьковой камере с жидким водородом). Поскольку и в рождении и в распаде $\Lambda$-гиперона участвуют одни и те же частицы ($\pi^-$-мезон и протон), представлялось удивительным, что скорость (т. е. вероятность) обоих процессов столь различна.

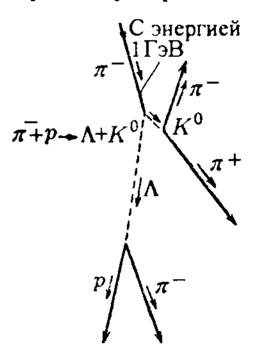


Рис. 11.8

Дальнейшие исследования показали, что странные частицы рождаются парами (см. (11.12)). Это навело на мысль, что сильные взаимодействия не могут играть роли в распаде частиц вследствие того, что для их проявления необходимо присутствие двух странных частиц. По той же причине оказывается запрещенным одиночное рождение странных частиц.

В основе запрета каких-либо процессов всегда лежит некоторый закон сохранения. Так, распад свободного протона по схеме $p \to n + e^+ + \nu$ запрещен законом сохранения энергии, по схеме $p \to e^+ + \nu$ — законом сохранения барионного заряда и т. д.

Чтобы объяснить запрет одиночного рождения странных частиц, М. Гелл-Манн и К. Нишиджима ввели в рассмотрение новое квантовое число $S$, суммарное значение которого должно, по их предположению, сохраняться при сильных взаимодействиях. Это квантовое число было названо *странностью*[19]) частицы. При слабых взаимодействиях странность может не сохраняться. Поэтому она

[19]) Названия квантовых чисел типа «странность» и «очарование» (есть и такое квантовое число) свидетельствуют о том, что физикам, как правило, присуще чувство юмора. Конечно, можно было бы вместо подобных экзотических названий пользоваться терминами «квантовое число №1», «квантовое число №2» и т. д. Однако это было бы ужасно скучно.

приписывается только сильно взаимодействующим частицам — мезонам и барионам. Так, для $K$-мезонов $S = +1$, а для $\Lambda$-гиперонов $S = -1$. Следовательно, процесс (11.12) идет с сохранением странности (суммарная странность как исходных, так и образовавшихся частиц равна нулю), а в ходе процесса (11.13) странность изменяется на единицу. Поэтому процесс (11.13) не может протекать с участием сильных взаимодействий.

Гелл-Манн и Нишиджима связали странность со средним электрическим зарядом $\langle Q \rangle$ частиц, образующих зарядовый мультиплет, и барионным зарядом $B$ частицы:

$$S = 2\langle Q \rangle - B. \tag{11.14}$$

С помощью данных табл. 11.3 можно найти $\langle Q \rangle$ для каждого из мультиплетов, из табл. 11.2 можно определить значение $B$ для различных частиц (напомним, что у частиц $B = +1$, у античастиц $B = -1$). Легко убедиться в том, что для нуклонов, антинуклонов, $\pi$-мезонов и $\eta$-мезона получается $S = 0$. Например, для нуклонов $\langle Q \rangle = 1/2$, $B = +1$, для антинуклонов $\langle Q \rangle = -1/2$, $B = -1$. Подстановка этих значений в (11.14) дает в обоих случаях $S = 0$. Частицы с $S = 0$ являются обычными, нестранными.

В то время были известны еще не все $K$-мезоны и гипероны. Гелл-Манн и Нишиджима приписали известным странным частицам такие значения квантового числа $S$, которые с помощью закона сохранения $S$ могли объяснить особенности их рождения и распада. Это позволило установить возможное число частиц в зарядовых мультиплетах и предсказать существование и свойства новых частиц. Так были предсказаны $\Sigma^0$- и $\Xi^0$-гипероны, а также $\widetilde{K}^0$-мезон, которые впоследствии были обнаружены экспериментально.

Средний заряд $\langle Q \rangle$ для многих мультиплетов оказывается полуцелым. Чтобы не иметь дела с дробными числами, было введено квантовое число

$$Y = 2\langle Q \rangle, \tag{11.15}$$

которое было названо г и п е р з а р я д о м. В соответствии с (11.14)

$$Y = B + S. \tag{11.16}$$

Поскольку барионный заряд сохраняется при всех взаимодействиях, гиперзаряд ведет себя так же, как и странность: он сохраняется в сильных и электромагнитных

взаимодействиях и может не сохраняться в слабых взаимодействиях.

Легко сообразить, что три квантовых числа $\langle Q\rangle$, $Y$ и $S$ по сути дела совершенно равноправны — значением одного из них определяются значения двух других. ($B$ предполагается известным.) Из этих трех квантовых чисел самым удобным является гиперзаряд $Y$; поэтому им обычно пользуются вместо $S$.

В табл. 11.4 приведены значения гиперзаряда $Y$, барионного заряда $B$ и странности $S$ для различных зарядовых мультиплетов.

Таблица 11.4

| Зарядовый мультиплет | Состав мультиплета | $Y$ | $B$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi$-мезоны | $\pi^+\ \pi^0\ \pi^-$ | 0 | 0 | 0 |
| $K$-мезоны | $K^+\ K^0$ | +1 | 0 | +1 |
| Анти-$K$-мезоны | $K^-\ \widetilde{K}^0$ | −1 | 0 | −1 |
| Эта-мезон | $\eta$ | 0 | 0 | 0 |
| Нуклоны | $p\ n$ | +1 | +1 | 0 |
| Антинуклоны | $\widetilde{p}\ \widetilde{n}$ | −1 | −1 | 0 |
| $\Lambda$-гиперон | $\Lambda$ | 0 | +1 | −1 |
| Анти-$\Lambda$-гиперон | $\widetilde{\Lambda}$ | 0 | −1 | +1 |
| $\Sigma$-гипероны | $\Sigma^+\ \Sigma^0\ \Sigma^-$ | 0 | +1 | −1 |
| Анти-$\Sigma$-гипероны | $\widetilde{\Sigma}^+\ \widetilde{\Sigma}^0\ \widetilde{\Sigma}^-$ | 0 | −1 | +1 |
| $\Xi$-гипероны | $\Xi^-\ \Xi^0$ | −1 | +1 | −2 |
| Анти-$\Xi$-гипероны | $\Xi^+\ \widetilde{\Xi}^0$ | +1 | −1 | +2 |
| $\Omega$-гиперон | $\Omega^-$ | −2 | +1 | −3 |
| Анти-$\Omega$-гиперон | $\widetilde{\Omega}^-$ | +2 | −1 | +3 |

Заметим, что электрический заряд частицы $Q$ может быть выражен через проекцию изотопического спина $T_z$ и гиперзаряд $Y$ (или барионный заряд $B$ и странность $S$):

$$Q = T_z + \frac{Y}{2} = T_z + \frac{B+S}{2}. \qquad (11.17)$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться, воспользовавшись данными табл. 11.3 и 11.4.

## 11.7. Несохранение четности в слабых взаимодействиях

В числе величин, характеризующих микрочастицы, есть сугубо квантово-механическая величина, называемая **четностью** ($P$). Мы знаем, что состояние частицы описывается в квантовой механике функцией $\psi(x, y, z)$. Рассмотрим, как может вести себя функция $\psi$ при так называемой **инверсии пространства**, т. е. при переходе к координатам $x'$, $y'$, $z'$, связанным с $x$, $y$, $z$ соотношениями

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z.$$

Из рис. 11.9 видно, что такое преобразование означает переход от правовинтовой системы координат к левовинтовой. Такой же переход осуществляется при отражении в зеркале (рис. 11.10). Следовательно, преобразование инверсии приводит к замене правого левым. Обе системы отсчета

Рис. 11.9

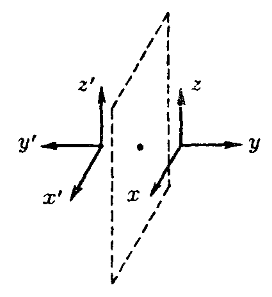



Рис. 11.10

$x$, $y$, $z$ и $x'$, $y'$, $z'$ отличаются друг от друга так, как отличаются правая и левая перчатки. Если вывернуть наизнанку (т. е. подвергнуть инверсии), например, правую перчатку, то она совпадет с левой.

Операция инверсии, произведенная дважды, очевидно, возвращает систему координат к первоначальному виду. Пусть операция инверсии приводит к умножению функции $\psi$ на некоторое число $a$:

$$\psi(x', y', z') = a\psi(x, y, z).$$

Применив к получившемуся выражению еще раз операцию инверсии, мы придем к функции

$$a\psi(x', y', z') = a^2\psi(x, y, z),$$

которая должна совпасть с первоначальной функцией $\psi(x, y, z)$. Следовательно, $a^2$ должно быть равно 1, а само $a$ может иметь значения $+1$ или $-1$.

Из сказанного вытекает, что операция инверсии либо оставляет функцию $\psi$ неизменной, либо изменяет знак $\psi$ на обратный. В первом случае состояние, описываемое функцией $\psi$, называется четным, во втором — нечетным. Поведение функции $\psi$ при инверсии зависит от внутренних свойств частиц, описываемых этой функцией. О частицах, описываемых четными функциями, говорят, что они обладают положительной внутренней четностью ($P = +1$); частицы, описываемые нечетными функциями, имеют отрицательную внутреннюю четность ($P = -1$). Четность системы частиц равна произведению четностей отдельных частиц, входящих в систему.

Из зеркальной симметрии пустого пространства вытекает закон сохранения четности, согласно которому *при всех превращениях, претерпеваемых системой частиц, четность состояния остается неизменной.* Сохранение четности означает инвариантность законов природы по отношению к замене правого левым (и наоборот).

До 1956 г. не возникало сомнений в том, что этот закон соблюдается при всех взаимодействиях. В 1956 г. Ли[20]) и Янг[21]) предположили, что при слабых взаимодействиях четность может не сохраняться. Для этого были следующие основания. В то время были известны два мезона, получившие обозначения $\tau$ и $\theta$. Они были одинаковы во всех отношениях, кроме одного: $\tau$-мезон распадался на три $\pi$-мезона, а $\theta$-мезон — только на два. Можно было, конечно, предположить, что оба мезона представляют собой одну и ту же частицу, которая способна распадаться двумя различными способами. Однако такое предположение вступало в противоречие с законом сохранения четности. Четность $\pi$-мезона $P = -1$. Поэтому четность системы из двух $\pi$-мезонов равна $(-1)^2 = +1$, а системы из трех $\pi$-мезонов $(-1)^3 = -1$. Из закона сохранения четности вытекало, что $\tau$- и $\theta$-мезоны различаются внутренней четностью (у $\tau$-мезона, распадающегося на три $\pi$-мезона, $P = -1$, а у $\theta$-мезона, распадающегося на два

[20]) Цзундао Ли (р. в 1926 г.) — физик-теоретик, по национальности китаец, с 1946 г. в США.

[21]) Чжэньшин Янг (р. в 1922 г.) — физик-теоретик, по национальности китаец, с 1945 г. в США.

$\pi$-мезона, $P = +1$) и, следовательно, представляют собой две различные частицы.

Со временем было достоверно установлено, что $\tau$- и $\theta$-мезоны — одна и та же частица, называемая теперь $K^0$-мезоном и имеющая $P = -1$. Следовательно, процесс $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$ идет с нарушением четности.

Ли и Янг предложили идею опыта для проверки несохранения четности, который был осуществлен в Колумбийском университете (США) Ву [22]) и ее сотрудниками. Идея опыта заключалась в следующем. Если правое и левое в природе неразличимы, то при $\beta$-распаде вылет электрона в направлении спина ядра и в направлении, ему противоположном, должен быть равновероятен. Действительно, при зеркальном отражении ядра направление его «вращения», т. е. направление спина, изменяется на противоположное (рис. 11.11). Если ядро испускает $\beta$-электроны с равной вероятностью в обоих направлениях (рис. 11.11 *а*), то зеркальное отражение системы ядро–электроны будет неотличимо от самой системы (они лишь повернуты относительно друг друга на 180°). Если же $\beta$-электроны испускаются преимущественно в одном направлении (рис. 11.11 *б*), то «левое» и «правое» становятся различимыми.

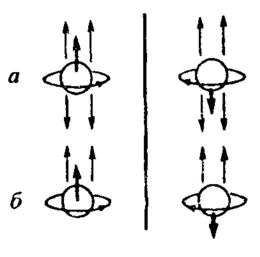



Рис. 11.11

В опыте Ву ядра радиоактивного кобальта $^{60}$Co ориентировались с помощью магнитного поля спинами в одном направлении. Для того чтобы тепловое движение не препятствовало такой ориентации, радиоактивный препарат охлаждался до сверхнизких температур (порядка $0,1$ K). Была обнаружена значительная разница в количествах $\beta$-электронов, испускаемых в обоих направлениях. Оказалось, что $\beta$-электроны испускаются преимущественно в направлении, противоположном направлению ядерных спинов. Таким образом, была доказана экспериментально неравноправность правого и левого при слабых взаимодействиях (напомним, что $\beta$-распад обусловлен слабым взаимодействием).

---

[22]) Цзиньсян Ву (р. в 1913 г.) — американский физик-экспериментатор, родилась в Китае.

После того как выяснилось, что пространственная четность ($P$) в слабых взаимодействиях не сохраняется, Л.Д. Ландау и независимо от него Ли и Янг выдвинули гипотезу о том, что любые взаимодействия инвариантны относительно сложного преобразования, заключающегося в одновременной инверсии пространства и замене частиц античастицами. Такое преобразование было названо комбинированной инверсией. Согласно этой гипотезе симметрия между правым и левым сохраняется, если при зеркальном отражении пространства частицы заменить античастицами. Действительно, если на рис. 11.11 *б* зеркально отраженное ядро заменить антиядром, то направление спина изменится на противоположное и зеркальное отражение системы не будет отличаться от самой системы.

Обозначим операцию пространственной инверсии символом $P$, а операцию зарядового сопряжения (т. е. замены частиц античастицами) — символом $C$. Тогда символом комбинированной инверсии будет $CP$. Поэтому инвариантность относительно комбинированной инверсии называют $CP$-инвариантностью. Четность состояния частицы относительно комбинированной инверсии называют комбинированной четностью. Таким образом, два существовавших ранее раздельно закона — закон инвариантности относительно зарядового сопряжения[23]) и закон сохранения пространственной четности — в случае слабых взаимодействий объединяются в один закон сохранения комбинированной четности.

В ряде процессов, в которых нарушается пространственная четность, действительно имеет место сохранение комбинированной четности. Однако в 1964 г. при изучении распадов $K^0$-мезонов были получены данные, свидетельствующие о нарушении при этих распадах закона сохранения комбинированной четности. Вдаваться в подробности по этому поводу мы не имеем возможности.

## 11.8. Нейтрино

Нейтрино — единственная частица, которая не участвует ни в сильных, ни в электромагнитных взаимодействиях. Исключая гравитационное взаимодействие, в ко-

[23]) То есть неизменяемости законов природы при замене частиц античастицами.

тором участвуют все частицы, нейтрино может принимать участие лишь в слабых взаимодействиях.

Долгое время оставалось неясным, чем отличается нейтрино от антинейтрино. Открытие закона сохранения комбинированной четности (см. предыдущий параграф) дало возможность ответить на этот вопрос: они отличаются спиральностью.

Под спиральностью понимается определенное соотношение между направлениями импульса **p** и спина **s** частицы. Спиральность считается положительной, если спин и импульс имеют одинаковое направление. В этом случае направление движения частицы (**p**) и направление «вращения», соответствующего спину, образуют правый винт (рис. 11.12 *а*). При противоположно направленных спине и импульсе (рис. 11.12 *б*) спиральность будет отрицательной (поступательное движение и «вращение» образуют левый винт). Очевидно, что спиральность можно определить как знак скалярного произведения **sp**.

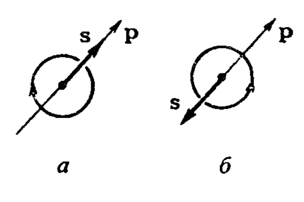


Рис. 11.12

Спиральность может иметь абсолютное значение, т. е. быть внутренним свойством, лишь для частицы с нулевой массой (такая частица существует, только двигаясь со скоростью $c$). Частица, масса которой отлична от нуля, будет двигаться со скоростью $v$, меньшей $c$. Спиральность такой частицы в системах отсчета, движущихся со скоростями, меньшими $v$, и со скоростями, бо́льшими $v$ (но меньшими $c$), будет различна (имульс частицы в таких системах отсчета имеет противоположные направления) [24]).

До 1980 г. предполагали, что масса нейтрино равна нулю. Поэтому считали, что спиральность является внутренним свойством нейтрино (и антинейтрино), сохраняющимся при всех процессах, в которых участвуют нейтрино. Однако в течение 1975–1980 гг. В.А. Любимов, Е.Г. Новиков, В.З. Нозик, Е.Ф. Третьяков и В.С. Козик провели эксперименты, в результате которых они пришли

[24]) Масса фотона равна нулю. Поэтому спиральность фотона имеет абсолютное значение. Два получающихся для фотона значения спиральности (положительное и отрицательное) соответствуют не частице и античастице, а двум различным состояниям поляризации одной и той же частицы.

к выводу, что масса покоя нейтрино отлична от нуля и, вероятно, находится в пределах от 15 до 44 эВ, а скорее всего, составляет 35 эВ (т. е. 7/100 000 часть массы электрона). Если результаты этих опытов подтвердятся, придется внести существенные поправки в сложившуюся картину как микромира (т. е. мира элементарных частиц), так и, в особенности, макромира (т. е. Вселенной). Изучение вопроса о массе нейтрино продолжается.

Согласно развитой Янгом и Ли, Ландау, а также Саламом[25]) теории продольного нейтрино все существующие в природе нейтрино, независимо от способа их возникновения, всегда бывают полностью продольно поляризованы (т. е. спин их направлен параллельно или антипараллельно импульсу **p**). Нейтрино имеет отрицательную (левую) спиральность (ему соответствует соотношение направлений **s** и **p**, изображенное на рис. 11.12 *б*), антинейтрино — положительную (правую) спиральность (рис. 11.12 *а*). Таким образом, спиральность — это то, что отличает нейтрино от антинейтрино.

При отражении в зеркале правая спираль превращается в левую. Следовательно, существование у нейтрино спиральности противоречит закону сохранения пространственной четности (частица не совпадает со своим отображением). Однако если одновременно с отражением в зеркале заменить нейтрино (обладающее левой спиральностью) на антинейтрино (обладающее правой спиральностью), то будут соблюдены требования закона сохранения комбинированной четности.

Наличие у нейтрино спиральности обнаруживается в цепочке превращений $\pi \to \mu \to e$. В конце своего пробега $\pi^+$-мезон распадается на мюон и нейтрино:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu.$$

Спин $\pi^+$-мезона равен нулю, импульс в конце пробега также обращается в нуль. Поэтому мюон и нейтрино должны разлететься в противоположные стороны, причем нейтрино «навяжет» мюону свою спиральность[26]) (рис. 11.13), иначе спин системы не останется равным нулю.

[25]) Абдус Салам (р. в 1926 г.) — пакистанский физик-теоретик.

[26]) Обычно спин мюона не фиксирован относительно направления его движения.

Мюон в конце своего пробега распадается по схеме

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \widetilde{\nu}.$$

Поскольку в данном случае мы имеем дело с распадом поляризованных мюонов, при их распаде должно наблюдаться то же явление, что и при $\beta$-распаде поляризованных ядер (в опыте Ву) — угловое распределение позитронов должно быть анизотропно относительно направления поляризации мюона, т. е. относительно направления его движения до остановки. Действительно, исследование фотографий, на которых зафиксированы процессы $\pi \to \mu \to e$ распада в пузырьковой камере, показывает, что позитроны испускаются чаще в направлении, обратном направлению движения мюонов (см. рис. 11.13).

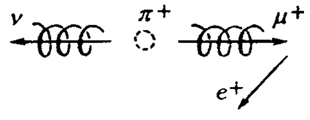


Рис. 11.13

Гипотеза о существовании нейтрино была высказана в 1932 г. В последующую четверть века было получено множество косвенных доказательств этой гипотезы, однако непосредственно наблюдать нейтрино не удавалось. Причина этого заключается в том, что, не обладая электрическим зарядом и ощутимой массой, нейтрино крайне слабо взаимодействуют с веществом. Так, например, нейтрино с энергией $\sim 1$ МэВ имеет в свинце пробег $\sim 10^{20}$ см, или 100 световых лет. Только после создания ядерных реакторов, которые являются источниками мощных потоков нейтрино ($\sim 10^{13}$ част./(см$^2$·с)), появилась возможность наблюдать реакции с участием этих неуловимых частиц.

Непосредственное наблюдение антинейтрино было осуществлено в серии опытов Рейнеса[27]) и К. Коуэна (1953–1956). Наблюдалась реакция

$$\widetilde{\nu} + p \to n + e^+, \qquad (11.18)$$

которая по существу является обращением реакции (10.7) распада нейтрона[28]). Свидетельством того, что антинейтрино вступило в реакцию с протоном, служил факт

[27]) Фредерик Рейнес (р. в 1918 г.) — американский физик.

[28]) Обращением реакции распада нейтрона в буквальном смысле слова была бы реакция $\widetilde{\nu} + p + e^- \to n$, однако такая реакция требует встречи трех частиц и поэтому практически невозможна. «Вычитание» частицы равнозначно добавлению античастицы; вычитая слева $e^-$ и добавляя справа $e^+$, получим (11.18).

одновременного возникновения нейтрона и позитрона (рис. 11.14). Позитрон практически сразу же аннигилировал с электроном, что приводило к возникновению двух $\gamma$-квантов, энергия каждого из которых равна 0,51 МэВ. Нейтрон после замедления захватывался ядром кадмия. Образовавшееся в результате возбужденное ядро высвечивало несколько $\gamma$-фотонов с суммарной энергией 9,1 МэВ.

Установка изображена схематически на рис. 11.15. Мишенью служили два сосуда ($190 \times 130 \times 7$ см$^3$), заполненные раствором хлористого кадмия в воде. Три бака ($190 \times 130 \times 60$ см$^3$) наполнялись жидкостью, способной

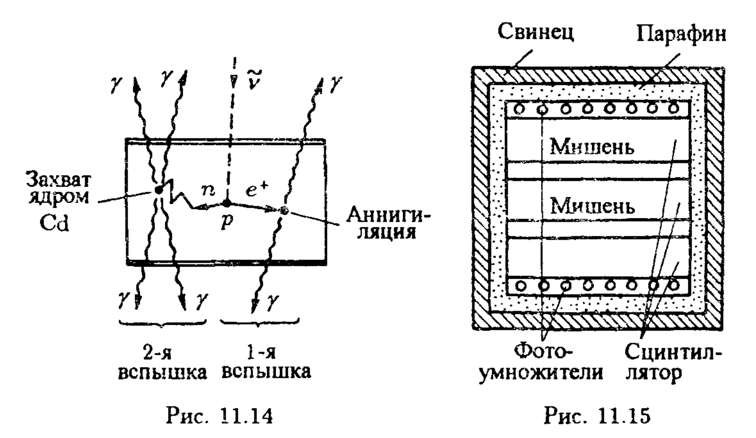



Рис. 11.14

Рис. 11.15

сцинтиллировать под действием $\gamma$-фотонов. Сцинтилляционные вспышки регистрировались 110-ю фотоумножителями. Для защиты от космического излучения и выходящих из реактора нейтронов резервуары были заключены в парафиновую, а затем в свинцовую оболочки. Все устройство было глубоко зарыто в землю вблизи большого реактора.

Сцинтилляционная вспышка, вызванная захватными $\gamma$-фотонами, запаздывала по отношению к вспышке, обусловленной аннигиляционными $\gamma$-фотонами, на несколько десятков микросекунд. Обе вспышки регистрировались по схеме запаздывающих совпадений; кроме того, оценивалась также энергия $\gamma$-фотонов, вызвавших каждую вспышку (1,02 и 9,1 МэВ). Это позволяло надежно отделить исследуемый эффект от фона, обусловленного другими процессами. Опыт продолжался 1371 ч (57 дней). В час регистрировалось в среднем около трех двойных вспы-

шек ожидаемой интенсивности. Эти результаты служат прямым доказательством существования антинейтрино.

В одних процессах нейтрино (или антинейтрино) возникает вместе с электроном (позитроном), в других процессах — вместе с мюоном (примеры можно найти в табл. 11.2). Долгое время полагали, что первые (электронные) нейтрино $\nu_e$ тождественны со вторыми (мюонными) нейтрино $\nu_\mu$. В 1962 г. было доказано экспериментально, что это не так. Идея опыта принадлежит Б. Понтекорво[29]). Обращением реакции (10.28) будет процесс

$$\nu_e + n \to p + e^- \tag{11.19}$$

(см. подстрочное примечание на с. 349). Возможен также аналогичный процесс, в котором вместо электрона возникает мюон:

$$\nu_\mu + n \to p + \mu^- \tag{11.20}$$

(частица, участвующая в этой реакции, должна быть, очевидно, не электронным, а мюонным нейтрино). Понтекорво предложил облучать вещество образующимися при распаде $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ мюонными нейтрино и наблюдать возникающие частицы. Присутствие среди них как $e^-$, так и $\mu^-$ указывало бы на тождественность $\nu_e$ и $\nu_\mu$. Присутствие только $\mu^-$ свидетельствовало бы о различии электронных и мюонных нейтрино.

Опыт был осуществлен Ледерманом[30]), Шварцем[31]) и др. в Брукхэвене (США). На ускорителе получались $\pi^+$-мезоны с энергией 15 ГэВ. Процесс $\pi$–$\mu$-распада (см. (10.14)) приводил к образованию мюонных нейтрино с энергией порядка 500 МэВ. Поток этих нейтрино направлялся в искровую камеру с массивными железными пластинами (общей массой 10 т). За 800 часов был зарегистрирован 51 случай рождения мюонов и ни одного случая рождения электронов. Этот результат служит доказательством того, что мюонные нейтрино ($\nu_\mu$ и $\widetilde{\nu}_\mu$) не тождественны электронным нейтрино ($\nu_e$ и $\widetilde{\nu}_e$).

---

[29]) Бруно Максимович Понтекорво (1913–1993) — советский физик, по национальности итальянец, с 1936 по 1950 г. работал во Франции, США, Канаде и Англии, с 1950 г. — в СССР.

[30]) Леон Макс Ледерман (р. в 1922 г.) — американский физик.

[31]) Мэлвин Шварц (р. в 1932 г.) — американский физик.

В связи с необходимостью различать электронное и мюонное нейтрино в формулах (10.7), (10.26)–(10.28) символ нейтрино должен быть дополнен индексом $e$, а в формулах (10.14) — индексом $\mu$. Формулы (10.16) должны быть написаны следующим образом:

$$\mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu.$$

## 11.9. Систематика элементарных частиц

Закономерности, наблюдаемые в мире элементарных частиц, могут быть сформулированы в виде законов сохранения. Таких законов накопилось уже довольно много (табл. 11.5). Некоторые из них оказываются не точными, а лишь приближенными. Так, например, закон сохранения гиперзаряда $Y$ (или странности $S$) выполняется в случае сильных и электромагнитных взаимодействий и нарушается в слабых взаимодействиях (соблюдение закона в данном виде взаимодействия указано в табл. 11.5 знаком плюс, нарушение — знаком минус).

Таблица 11.5

| Закон сохранения | Вид взаимодействия | | |
|---|---|---|---|
| | сильное | электро-магнитное | слабое |
| энергии $E$ | + | + | + |
| импульса **p** | + | + | + |
| момента импульса **M** | + | + | + |
| электрического заряда $Q$ | + | + | + |
| барионного заряда $B$ | + | + | + |
| лептонного заряда $L$ | + | + | + |
| изотопического спина $T$ | + | − | − |
| гиперзаряда $Y$ (или странности $S$) | + | + | − |
| зарядового сопряжения $C$ | + | + | − |
| четности $P$ | + | + | − |
| комбинированной четности $CP$ | + | + | − |

Каждый закон сохранения выражает определенную симметрию системы. Законы сохранения импульса **p**, момента импульса **M** и энергии $E$ отражают свойства симметрии пространства и времени: сохранение $E$ есть следствие однородности времени, сохранение **p** обусловлено однородностью пространства, а сохранение **M** — его изо-

тропностью. Закон сохранения четности связан с симметрией между правым и левым ($P$-инвариантность). Симметрия относительно зарядового сопряжения (симметрия частиц и античастиц) приводит к сохранению зарядовой четности ($C$-инвариантность). Законы сохранения электрического, барионного и лептонного зарядов выражают особую симметрию $\psi$-функции. Наконец, закон сохранения изотопического спина отражает изотропность изотопического пространства. Несоблюдение одного из законов сохранения означает нарушение в данном взаимодействии соответствующего вида симметрии. Например, электромагнитное взаимодействие нарушает симметрию изотопического пространства, вследствие чего изотопический спин $T$ не сохраняется в электромагнитных взаимодействиях.

Введение изотопического спина позволило объединить частицы в зарядовые мультиплеты (см. § 11.5). Расширение схемы изотопического спина привело Гелл-Манна и независимо от него Ю. Неймана к созданию в 1961 г. теории унитарной симметрии элементарных частиц. В этой теории предполагается, что сильное взаимодействие инвариантно относительно специальных преобразований[32]) в некотором трехмерном комплексном векторном пространстве (пространстве унитарного спина), которые сохраняют неизменными изотопический спин $T$ и гиперзаряд $Y$. Таким способом удается сгруппировать зарядовые мультиплеты в супермультиплеты (или унитарные мультиплеты). Систему симметрии частиц, устанавливаемую унитарной теорией, называют также восьмеричным путем.

Частицы[33]), составляющие супермультиплет, должны иметь одинаковые спины и четности $P$. Они могут различаться по массе, электрическому заряду, гиперзаряду и изотопическому спину, однако эти величины должны быть связаны между собой определенными правилами.

На рис. 11.16 изображен октет (супермультиплет, включающий восемь частиц), объединяющий мезоны (кроме резонансов). Все они имеют спин, равный нулю, и отрицательную четность. По вертикальной оси отложен гиперзаряд $Y$, по горизонтальной оси — проекция изотопиче-

[32]) Принадлежащих к так называемой группе SU(3).

[33]) Имеются в виду лишь сильновзаимодействующие частицы.

ского спина $T_z$ (третья компонента изотопического спина), по наклонной оси — электрический заряд $Q$ частиц. Частицы мезонного октета расположены в вершинах и в центре правильного шестиугольника. В центре помещаются две частицы: $\pi^0$ и $\eta$. В момент создания теории унитарной симметрии были известны только семь мезонов (кроме $\eta$). В соответствии с выводом теории были предсказаны существование восьмого мезона и его свойства. В 1961 г. предсказанный мезон ($\eta$) был обнаружен, причем его свойства оказались в хорошем соответствии с предсказаниями теории.

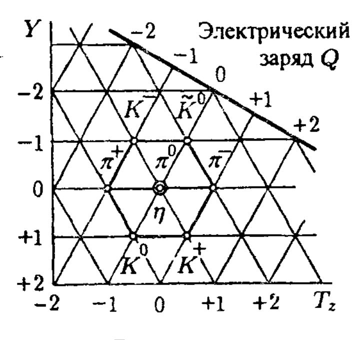



Рис. 11.16

На рис. 11.17 изображен октет долгоживущих барионов. Все частицы имеют спин, равный 1/2, и положительную четность. В центре шестиугольника помещаются гипероны $\Sigma^0$ и $\Lambda$.

Наконец, на рис. 11.18 показан барионный декуплет (супермультиплет, объединяющий 10 частиц). Он включает девять резонансов и долгоживущую «настоящую» частицу

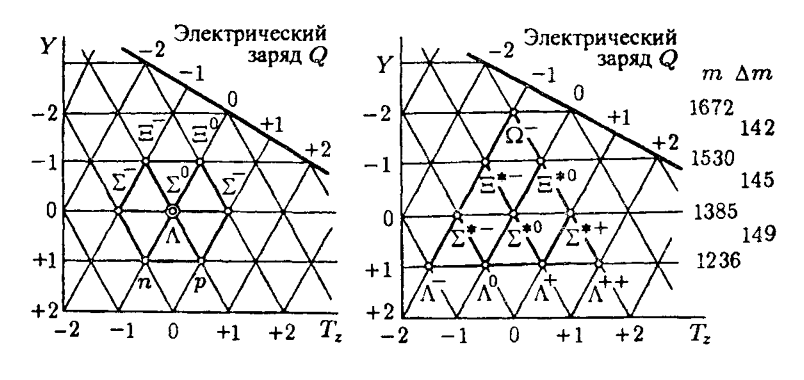



Рис. 11.17 Рис. 11.18

$\Omega^-$-гиперон. Спин всех частиц равен 3/2, четность положительна. Частицы располагаются на диаграмме в виде правильного треугольника. Справа на рисунке указаны

масса частиц $m$ и разность масс $\Delta m$, выраженные в мегаэлектронвольтах. Примечательно, что при переходе от одной группы частиц к другой масса изменяется на почти одинаковую величину (около 145 МэВ).

В момент создания теории $\Xi^*$-гипероны и $\Omega^-$-частица еще не были известны. Резонансы $\Xi^{*-}$ и $\Xi^{*0}$ были обнаружены в 1962 г. Оставалась незаполненной вершина пирамиды. Гелл-Манн предсказал, что отвечающая ей частица должна иметь спин, равный 3/2, гиперзаряд $Y = -2$ и массу около 1675 МэВ (на 145 МэВ больше, чем масса $\Xi^*$-частиц). Почти тотчас же начались планомерные поиски этой частицы, получившей название $\Omega^-$-гиперона. В Брукхэйвенской лаборатории для этой цели были использованы ускоритель на 33 ГэВ и двухметровая пузырьковая камера, содержавшая 900 литров жидкого водорода. Было сделано около 300 000 снимков, прежде чем на одном из них в январе 1964 г. был зафиксирован процесс рождения и распада $\Omega^-$-частицы. Ее свойства, в частности масса, в точности совпадали с предсказанными теорией. Таким образом, открытие $\Omega^-$-гиперона явилось триумфом теории унитарной симметрии.

Возникает вопрос, почему «настоящая» частица $\Omega^-$-гиперон; живущая приблизительно $10^{-10}$ с, попала в один декуплет с резонансами, время жизни которых порядка $10^{-23}$ с. Причина такой «живучести» $\Omega^-$-гиперона заключается в том, что его гиперзаряд равен $-2$ (странность $S = -3$). Из-за этого $\Omega^-$-гиперон не может распадаться за счет сильных взаимодействий, с участием которых распадаются остальные частицы декуплета.

Входящие в декуплет резонансы распадаются по схемам

$$\Delta \to N + \pi, \quad \Delta \to N + \pi^+ + \pi^-, \quad \Delta \to N + \gamma,$$

$$\Sigma^* \to \Lambda + \pi, \quad \Sigma^* \to \Sigma + \pi, \quad \Xi^* \to \Xi + \pi,$$

где $N$ — нуклон, $\Lambda$, $\Sigma$, $\Xi$ — соответствующие гипероны. В ходе всех этих процессов гиперзаряд (а значит, и странность) сохраняется (в этом легко убедиться, сопоставив диаграммы, изображенные на рис. 11.17 и 11.18). Следовательно, распады происходят за счет сильных взаимодействий с характерным временем порядка $10^{-23}$ с.

В случае $\Omega^-$-гиперона сохранение гиперзаряда (странности) могло бы иметь место при распаде на две или боль-

шее число странных частиц. К числу таких процессов, в которых, кроме гиперзаряда, сохраняются также электрический и барионный заряды, относятся:

$$\Omega^- \to \Xi^- + \widetilde{K}^0, \quad \Omega^- \to \Sigma^- + \widetilde{K}^0 + \widetilde{K}^0,$$

$$\Omega^- \to n + K^- + \widetilde{K}^0 + \widetilde{K}^0, \quad \Omega^- \to p + K^- + K^- + \widetilde{K}^0.$$

Однако эти процессы запрещены законом сохранения энергии. Таким образом, $\Omega^-$-гиперон может распадаться, лишь нарушая закон сохранения гиперзаряда, т. е. за счет слабых взаимодействий. Соответственно время его жизни равно $10^{-10}$ с. Распад осуществляется по одной из следующих схем:

$$\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-, \quad \Omega^- \to \Xi^- + \pi^0, \quad \Omega^- \to \Lambda + K^-.$$

Спин $\Omega^-$-гиперона равен 3/2, спин $\Xi$- и $\Lambda$-гиперонов равен 1/2, спин $\pi$- и $K$-мезонов равен нулю. Однако закон сохранения момента импульса не нарушается, так как образующаяся пара частиц обладает орбитальным моментом импульса, равным 1. Следовательно, суммарный момент импульса этих частиц равен 3/2.

## 11.10. Кварки

Частиц, называемых элементарными, стало так много, что возникли серьезные сомнения в их элементарности. Каждая из сильно взаимодействующих частиц характеризуется тремя независимыми аддитивными квантовыми числами: зарядом $Q$, гиперзарядом $Y$ и барионным зарядом $B$. В связи с этим появилась гипотеза о том, что все частицы построены из трех фундаментальных частиц — носителей этих зарядов. Первая модель подобного рода была предложена Сакатой[34]), который считал фундаментальными частицами протон $p$, нейтрон $n$ и $\Lambda$-гиперон[35]). Однако схема Сакаты оказалась неприменимой в области сильных взаимодействий.

[34]) Сёити Саката (1911–1970) — японский физик-теоретик.

[35]) Тот факт, что многие частицы имеют массу, значительно меньшую суммы масс $p$, $n$ и $\Lambda$, не должен нас смущать, так как масса системы связанных частиц может оказаться намного меньше суммы масс частиц, входящих в систему (ср. с энергией связи частиц в ядре, § 10.2).

В 1964 г. Гелл-Манн и независимо от него Цвейг[36]) выдвинули гипотезу, согласно которой все элементарные частицы построены из трех частиц, названных кварками[37]). Этим частицам приписываются дробные квантовые числа, в частности электрический заряд, равный +2/3, −1/3, −1/3 соответственно для каждого из трех кварков. Эти кварки обычно обозначаются буквами $u$ (от английского слова «up», что означает «вверх»), $d$ (down — вниз) и $s$ (strange — странный или sideways — боковой). По аналогии со схемой Сакаты кварки $u$, $d$, $s$ иногда обозначаются буквами $p$, $n$, $\lambda$. Кроме кварков, рассматриваются антикварки ($\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{s}$). Свойства, приписываемые кваркам, указаны в табл. 11.6 (кварки $c$, $b$, $t$, очарование и цвет обсуждаются ниже).

Мезоны образуются из пары кварк — антикварк, а барионы — из трех кварков. В табл. 11.7 приведены некоторые из этих образований.

Каждому кварку приписывается одинаковый магнитный момент $\mu_{\text{кв}}$, значение которого из теории не определяется. Расчеты, произведенные на основании такого предположения, дают для протона значение магнитного момента $\mu_p = \mu_{\text{кв}}$, а для нейтрона $\mu_n = -(2/3)\mu_{\text{кв}}$. Таким образом, для отношения магнитных моментов получается значение $\mu_p/\mu_n = -3/2$, превосходно согласующееся с экспериментальным значением (см. § 10.1).

В дальнейшем систему кварков пришлось расширить. Побудительным мотивом для этого послужило, в частности, то, что связанные состояния из трех кварков типа $uuu$ ($\Delta^{++}$), $ddd$ ($\Delta^-$), $sss$ ($\Omega^-$) противоречат принципу Паули. Действительно, из табл. 11.6 и 11.7 видно, что все квантовые числа кварков в этих образованиях одинаковы. Однако, поскольку спин кварков равен 1/2, в одной системе не может быть не только трех, на даже и двух кварков с одинаковым набором квантовых чисел.

По ряду соображений, в частности, чтобы устранить противоречие с принципом Паули, было введено понятие

---

[36]) Джордж Цвейг (р. в 1937 г.) — американский физик.

[37]) Название «кварк» заимствовано Гелл-Манном из фантастического романа Дж. Джойса «Поминки по Финнегану». В романе есть песня, начинающаяся словами «Three quarks», что означает «три карканья», «три кваканья», «три пустяка». Цвейг назвал кварки тузами, но это название не привилось.

цвета кварка. Стали говорить, что каждый кварк может существовать в трех «окрашенных» формах: желтой, синей и красной (отметим, что смесь этих цветов дает «нулевой» белый цвет). Тогда, скажем, образующие $\Omega^-$-гиперон $s$-кварки имеют неодинаковую окраску, и принцип Паули не нарушается[38]).

Таблица 11.6

| Тип (аромат) кварка | Электрический заряд $Q$ | Барионное число $B$ | Спин | Странность $S$ | Очарование $C$ | Цвет |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | +2/3 | +1/3 | 1/2 | 0 | 0 | Желтый, синий, красный |
| $d$ | −1/3 | +1/3 | 1/2 | 0 | 0 | То же |
| $s$ | −1/3 | +1/3 | 1/2 | −1 | 0 | » |
| $c$ | +2/3 | +1/3 | 1/2 | 0 | +1 | » |
| $b$ | −1/3 | +1/3 | 1/2 | 0 | 0 | » |
| $t$ | +2/3 | +1/3 | 1/2 | 0 | 0 | » |
| $\tilde{u}$ | −2/3 | −1/3 | 1/2 | 0 | 0 | Фиолетовый, оранжевый, зеленый |
| $\tilde{d}$ | +1/3 | −1/3 | 1/2 | 0 | 0 | То же |
| $\tilde{s}$ | +1/3 | −1/3 | 1/2 | +1 | 0 | » |
| $\tilde{c}$ | −2/3 | −1/3 | 1/2 | 0 | −1 | » |
| $\tilde{b}$ | +1/3 | −1/3 | 1/2 | 0 | 0 | » |
| $\tilde{t}$ | −2/3 | −1/3 | 1/2 | 0 | 0 | » |

Сочетание цветов кварков в адронах должно быть таким, чтобы средний цвет адрона был нулевым (т. е. адрон был «бесцветным»). Например, в состав протона входят кварки: $u$ (желтый), $u$ (синий) и $d$ (красный). В сумме получается нулевой (белый) цвет.

Антикварки считаются окрашенными в дополнительные цвета (антицвета), дающие в сумме с цветом нулевой цвет. Соответственно мезоны, состоящие из кварка и антикварка, также имеют нулевой цвет. Антицветом для

[38]) Отметим, что «цвет» и «очарование», так же как и «странность», суть просто названия квантовых чисел.

желтого является фиолетовый цвет, для синего — оранжевый, для красного — зеленый (см. табл. 11.6).

Таблица 11.7

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^+$ | $u\tilde{d}$ | +1 | 0 | 0 | ↑↓ | 0 | ↑↑ | 1 |
| $\pi^-$ | $\tilde{u}d$ | −1 | 0 | 0 | ↑↓ | 0 | ↑↑ | 1 |
| $K^+$ | $u\tilde{s}$ | +1 | 0 | +1 | ↑↓ | 0 | ↑ | 1/2 |
| $p$ | $uud$ | +1 | +1 | 0 | ↑↓↑ | 1/2 | ↑↓↑ | 1/2 |
| $n$ | $udd$ | 0 | +1 | 0 | ↑↓↑ | 1/2 | ↑↓↑ | 1/2 |
| $\Sigma^+$ | $uus$ | +1 | +1 | −1 | ↑↓↑ | 1/2 | ↑↑ | 1 |
| $\Lambda$ | $uds$ | 0 | +1 | −1 | ↑↓↑ | 1/2 | ↑↑ | 0 |
| $\Delta^{++}$ | $uuu$ | +2 | +1 | 0 | ↑↑↑ | 3/2 | ↑↑↑ | 3/2 |
| $\Delta^-$ | $ddd$ | −1 | +1 | 0 | ↑↑↑ | 3/2 | ↑↑↑ | 3/2 |
| $\Omega^-$ | $sss$ | −1 | +1 | −3 | ↑↑↑ | 3/2 | — | 0 |

Пояснение:
1 — частица; 2 — состав; 3 — электрический заряд $Q$; 4 — барионное число $B$; 5 — странность $S$; 6 — взаимная ориентация спинов кварков; 7 — спин частицы; 8 — взаимная «ориентация» изотопических спинов кварков; 9 — изотопический спин частицы $T$

В основном же цвет кварка (подобно знаку электрического заряда) стал выражать различие в свойстве, определяющем взаимное притяжение и отталкивание кварков. По аналогии с квантами полей различных взаимодействий (фотонами в электромагнитных взаимодействиях, $\pi$-мезонами в сильных взаимодействиях и т. д.) были введены частицы — переносчики взаимодействия между кварками. Эти частицы были названы глюонами (от английского слова glue — клей). Они переносят цвет от одного кварка к другому, в результате чего кварки удерживаются вместе.

В 1974 г. была открыта практически одновременно в двух лабораториях США частица с огромной массой, равной 3,10 ГэВ (более трех масс нуклона). В одной из лабораторий новой частице дали обозначение $J$, в другой — $\psi$,

в связи с чем эту частицу называют $J/\psi$-частицей (джей-пси-частицей). Вскоре после того были обнаружены другие $\psi$-частицы с массами 3,69; 3,77 и 4,03 ГэВ, а также семейство $\chi$-частиц с массами 3,45; 3,51 и 3,55 ГэВ.

Открытие $\psi$- и $\chi$-частиц послужило подтверждением предложенной ранее модели частиц из четырех кварков. Кроме $u$-, $d$- и $s$-кварков, в этой модели фигурирует четвертый, «очарованный» кварк (от английского charmed — очарованный). Он отличается от остальных кварков тем, что квантовое число $C$, получившее название очарования (его называют также «шарм» или «чарм»), у него равно единице, в то время как для остальных кварков оно равно нулю (см. табл. 11.6). В состав обычных «неочарованных» частиц (мезонов и барионов) $c$-кварк не входит.

Частицы семейств $\psi$ и $\chi$ представляют собой различные уровни (состояния) системы $c\tilde{c}$ (очарованные кварк–антикварк). По аналогии с системой электрон-позитрон (т. е. антиэлектрон), которая называется позитронием, система $c\tilde{c}$ получила название чармония. $J/\psi$-частица (ее называют также $J/\psi$-мезоном) соответствует первому уровню чармония, остальные $\psi$-частицы — уровням $^3S_1$, $\chi$-частицы — $^3P_J$-уровням. Найденный в 1979 г. в Стэнфорде тяжелый $\eta_c$-мезон (с массой 2,98 ГэВ) представляет собой основное состояние парачармония ($^1S_0$).

Поскольку очарование кварка $c$ и его антикварка $\tilde{c}$ равно соответственно $+1$ и $-1$, квантовое число $C$ системы $c\tilde{c}$ равно нулю. Говорят, что $\psi$- и $\chi$-частицы обладают скрытым очарованием. В 1976 г. были открыты предсказанные теоретически частицы с явным очарованием. Их свойства приведены в табл. 11.8.

Таблица 11.8

| Частица | Масса, ГэВ | Структура | Заряд $Q$ | Барионное число $B$ | Очарование $C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $D^0$ -мезон | 1,863 | $c\tilde{u}$ | 0 | 0 | +1 |
| $D^+$ -мезон | 1,868 | $c\tilde{d}$ | +1 | 0 | +1 |
| $F^+$ -мезон | 2,04 | $c\tilde{s}$ | +1 | 0 | +1 |
| $\Lambda_c^+$ -барион | 2,27 | $cdu$ | +1 | +1 | +1 |

Для объяснения свойств открытой в 1976 г. $\Upsilon$-частицы (ипсилон-частицы) пришлось ввести пятый кварк, получивший обозначение $b$ (bottom — нижний или beauty — прелестный) (см. табл. 11.6). Частицы $\Upsilon$ (9,46 ГэВ), $\Upsilon'$ (10,02 ГэВ), $\Upsilon''$ (10,40 ГэВ), $\Upsilon'''$ (10,55 ГэВ) представляют собой различные уровни системы $b\tilde{b}$.

Недавно выяснилось, что в природе существует шестой, очень массивный кварк, обозначаемый буквой $t$ (truth — истинный).

Таким образом, система кварков включает уже кварки шести сортов (ароматов) ($u$, $d$, $s$, $c$, $b$, $t$), каждый из которых существует в трех цветовых разновидностях (желтой, синей и красной).

Идея кварков оказалась весьма плодотворной. Она позволила не только систематизировать уже известные частицы, но и предсказать целый ряд новых. В частности, существование $\Omega^-$-гиперона и его свойства (см. § 11.9) были предсказаны с помощью модели кварков. Гипотеза кварков позволила также объяснить многие свойства частиц и связать между собой различные процессы.

Ряд экспериментальных данных указывает с несомненностью на реальное существование кварков. К их числу относятся результаты изучения рассеяния быстрых электронов протонами. Характер рассеяния свидетельствует о наличии внутри протона трех точечных рассеивающих центров с зарядами $2/3e$ и $1/3e$, что полностью согласуется с трехкварковой моделью протона.

Вместе с тем все попытки наблюдать кварки в свободном состоянии оказались безуспешными. Это привело к выводу, что кварки могут существовать только внутри адронов и в принципе не могут наблюдаться в свободном состоянии. Появился даже применительно к кваркам термин конфайнмент (от английского confinement, что означает «тюремное заключение»).

Причиной конфайнмента является необычное поведение сил взаимодействия кварков друг с другом. При малых расстояниях эти силы крайне малы, так что кварки оказываются практически свободными (это состояние называется асимптотической свободой). Однако с увеличением расстояний между кварками силы взаимодействия очень быстро растут, не позволяя кваркам вылететь из адрона.

## 11.11. Великое объединение

Эйнштейн потратил много лет на то, чтобы единым образом описать гравитационное и электромагнитное взаимодействия. Однако его усилия не увенчались успехом. Идея Эйнштейна о единстве различных видов взаимодействий была реализована (хотя бы частично) спустя 30 лет после его смерти. Удалось объединить в рамках единой теории электромагнитное и слабое взаимодействия и разработать основы для построения единой теории электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий.

В конце 70-х годов Вайнберг[39]), Глэшоу[40]) и Салам создали единую теорию электрослабых (т. е. электромагнитных и слабых) взаимодействий. Из этой теории вытекает, что переносчиками слабых взаимодействий является группа частиц, получивших название промежуточных векторных[41]) бозонов. В эту группу входят две заряженные частицы ($W^+$ и $W^-$) и одна нейтральная ($Z^0$) ($W$ — первая буква английского слова weak — слабый). Таким образом, слабые взаимодействия подобны электромагнитным, переносчиками которых также являются векторные бозоны — фотоны. Теория позволила предсказать массы промежуточных бозонов.

Промежуточные бозоны были обнаружены в 1982–1983 гг. двумя группами физиков в ЦЕРНе (Европейской организации ядерных исследований, расположенной вблизи Женевы). Опыт проводился на протон-антипротонном коллайдере — ускорителе, в котором взаимодействуют встречные пучки протонов и антипротонов, каждый из которых ускорялся до энергии 270 ГэВ. В хорошем согласии с предсказаниями теории масса $W^{\pm}$-бозонов оказалась равной 81 ГэВ, а $Z^0$-бозона — 93 ГэВ (напомним, что масса нуклона равна примерно 1 ГэВ).

Промежуточные бозоны — нестабильные частицы, их время жизни составляет всего $3 \cdot 10^{-25}$ с. Несмотря на это, их рождение надежно устанавливается по природе и энергии продуктов распада.

---

[39]) Стивен Вайнберг (р. в 1933 г.) — американский физик.

[40]) Шелдон Глэшоу (р. в 1932 г.) — американский физик.

[41]) Векторными называются частицы со спином, равным единице (и отрицательной четностью).

Характерные схемы распада промежуточных бозонов имеют вид

$$W^+ \to e^+ + \nu_e, \quad W^- \to e^- + \widetilde{\nu}_e, \quad Z^0 \to e^+ + e^-,$$
$$W^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad W^- \to \mu^- + \widetilde{\nu}_\mu, \quad Z^0 \to \mu^+ + \mu^-.$$

Мы знаем, что $\beta$-распад происходит за счет слабого взаимодействия. Следовательно, в нем должен участвовать промежуточный бозон. В соответствии с этим, например, $\beta$-распад нейтрона ($n \to p + e^- + \widetilde{\nu}_e$) в действительности представляет собой двухступенчатый процесс:

$$n \to p + W^-,$$

затем

$$W^- \to e^- + \widetilde{\nu}_e.$$

Итак, теория электрослабого взаимодействия получила блестящее экспериментальное подтверждение. На очередь стало создание большого объединения, идея которого состоит в том, что сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия представляют собой различные проявления одного фундаментального взаимодействия, характеризуемого одной безразмерной константой.

Энергия, необходимая для прямой проверки теории большого объединения путем реакций между частицами (около $10^{15}$ ГэВ), столь велика, что вряд ли будет достигнута на ускорителях в обозримое время. Однако имеется способ косвенной проверки. Дело в том, что простейший вариант теории большого объединения предсказывает распад протона. Нестабильность протона (если она есть) крайне мала. Теоретические оценки времени жизни протона дают значение $10^{29}$–$10^{30}$ лет (отметим, что время существования Вселенной порядка $10^{10}$ лет). Столь большое время жизни не исключает возможности экспериментальной проверки предсказания теории. Если время жизни составляет $10^{30}$ лет, то в одном кубическом метре воды должен в течение года распадаться один протон. Пока обнаружить распад протона не удалось. Из экспериментальных данных вытекает, что время жизни протона превышает $10^{31}$ лет. Попытки зарегистрировать распад протона продолжаются. Обнаружение нестабильности протона явилось бы блестящим подтверждением теории Великого объединения.

# Предметный указатель


Абсолютно черное тело 12–15
Адроны 320, 358
Активность радиоактивного вещества 301
Альфа-частицы 55, 56, 295–297
Аннигиляция частиц и античастиц 330
Антинейтрино 278
Антинейтрон 332
Антипротон 332
Античастицы 327, 332
Аромат кварка 358, 361
Асимптотическая свобода 361
Атомная единица массы 277
Атомный номер 279

Барионное число 333
Барионный заряд 333, 356
Барионы 319, 335, 341, 354
Барн 305
Беккерель 301
Бета-распад 298
Бозоны 144, 200, 201, 212, 239
— векторные 362
Боровский радиус 67, 79, 109

Вакуум 329
Векторная модель атома 131–133
Взаимодействие гравитационное 318, 319
— сильное 286, 290, 301, 318, 339
— слабое 318, 319, 339, 345, 362
— электромагнитное 287, 319
Виртуальные процессы 287–290
Внутренняя конверсия 296
Волна де Бройля 69
Волновая функция 80
Волновой вектор 44, 218
— пакет 229
Время жизни возбужденных состояний атома 114
— — — — — ядра 198, 296
— — метастабильных состояний 114
— — радиоактивного ядра 293
— — частиц 319, 335, 336
— распада 319
— релаксации 234
Вырождение 104, 105

Газ фононный 192, 210
— фотонный 192, 208
— электронный 218, 219, 223
Газ электронный вырожденный 223
— — невырожденный 223
Гамма-квант 194, 196, 197, 290
Гармонический осциллятор 101, 102, 158, 182
Гелий 212, 214
Гиперзаряд 341, 356
Гипероны 320, 340
Гиперповерхность 203
Гипотеза де Бройля 69, 70
— Планка 30, 102
— Юкавы 288, 289
Гиромагнитное отношение 129
Глюоны 359
Гравитационное красное смещение 199
Гравитоны 319
Граница серии 53

Действие 30
Дейтерий 279, 312, 315
Дейтрон 286, 312, 315
Деление ядер 307–310
Дефект массы 282
Джей-пси частица 359, 360
Дисперсионная кривая 215, 216, 226
Дырки 242–247

Единица активности 301
Естественная единица момента импульса 92
— система единиц 126

Закон Больцмана 31, 141, 169, 170, 182
— смещения Вина 18, 19, 29, 34
— Дюлонга и Пти 181, 189
— Кирхгофа 13, 14
— Мозли 154, 155
— радиоактивного превращения 292
— сохранения барионного заряда 321, 333, 340, 352, 353
— — гиперзаряда 341, 342, 352
— — изотопического спина 339, 352, 353
— — импульса 330, 331, 352
— — комбинированной четности 346, 352
— — лептонного заряда 334, 336, 352, 353

Закон сохранения момента импульса 106, 299, 352, 356
— — пространственной четности 343–346, 348, 352
— — странности 341, 352, 353
— — электрического заряда 333
— — энергии 287, 298, 340, 352
— Стефана–Больцмана 18, 34
— $T^3$ Дебая 189
— трех вторых 255
Зарядовое сопряжение 334
— число 278
Зона Бриллюэна 226
— валентная 227, 228, 242, 250
— запрещенная 224–229, 245
— проводимости 228, 242
— разрешенная 224–229
— энергетических уровней 224

Идеальный бозе-газ 206
—ферми-газ 201
Излучение вынужденное 167, 173
— индуцированное 167
— равновесное 9, 10
— рентгеновское 35, 36, 152
— спонтанное 167
— тепловое 9, 10
— тормозное 36, 152
— характеристическое 36, 152
Изобары 279
Изомеры 279, 296
Изотопическое пространство 337
Изотопы 212, 279
Изотоны 279
Инверсия комбинированная 346
— пространства 343
Испускательная способность 11
— — абсолютно черного тела 13
$jj$-связь 127

Каон 320, 334
Квазиимпульс 192, 215
Квазичастица 192, 215, 243
Квант действия 30
— магнитного потока 240
— света 39–42, 61
— энергии 30
Квантование момента импульса 90
— энергии 85
Квантовое число азимутальное 91, 93, 104, 105, 122, 144
— — вращательное 159
— — главное 66, 104, 112, 141
— — колебательное 158
— — магнитное 92, 104, 145
Квантовое число полного момента 122, 281
— — спина ядра 280
— — спиновое 120–122, 145
Квантовые числа электронов в атоме 144, 145
Квантовый дефект 113
Кварки 357–361
$K$-захват 298
$K$-мезоны 320, 334, 341, 345, 346
Комбинационное рассеяние света 165, 176, 192
Комптоновская длина волны 50
Конденсация Бозе–Эйнштейна 214, 215
Константы взаимодействия 318
Контакт Джозефсона 241
Контактная разность потенциалов 259–262
Конфайнмент 361
Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра 30, 35, 37, 40
Корпускулярно-волновой дуализм 45
Коэффициент отражения 98
— Пельтье 267
— прозрачности 98
— прохождения 98
— термо-ЭДС 266
— Томсона 269
Коэффициенты Эйнштейна 168
Кратность вырождения 104, 105
Критический ток 237
— — контакта 241
Критическое поле 237
Куперовские пары 238–240
Кюри 301

Лазер 41, 170, 174, 175
Ларморовская частота 136
Лептонное число 334
Лептонный заряд 334
Лептоны 290, 319, 335
$LS$-связь 127
Люминесценция 9, 10

Магнетон Бора 121, 129, 277
— ядерный 277
Магнитный момент атома 130
Магнитный момент электрона орбитальный 129
— — — собственный 120, 121
Мазер 170
Массовое число 279

Мезоны 120, 287, 289, 319, 321, 326, 335, 341, 344, 353, 358
Микрочастицы 72, 73, 75
Многофотонные процессы 41, 108 177, 178
Множитель Ланде 130, 137
Молекула водорода 156
Момент импульса 90, 92
— — полный атома 127
— — электрона 122
— — собственный 120, 121
— магнитный 120
— — атома 130
— — орбитальный 122, 129
— — полный 122
— — собственный 120, 121
— — спиновый 120
— механический 120
— — орбитальный 120
— — собственный 120
— — спиновый 120
Мультиплетность терма 122, 123
Мультиплеты 119, 336, 337
— зарядовые 337, 338, 341, 353
Мю-мезон 289, 290
Мюон 289, 290, 326, 336

Нейтрино 289, 299, 315, 320, 335, 336, 346–351
Нейтрон 72, 121, 277, 279, 290, 291, 298, 307, 335, 337
Нуклон 277, 286, 288, 318

Однофотонные процессы 41
Омега-минус-гиперон 335, 354–356, 361
Оптико-механическая аналогия 80, 81
Оптический квантовый генератор 170
Опыт Барнетта 130
— Боте 42
— Вавилова 46
— Ву 345
— Дивера и Фейрбэнка 240, 241
— Долла и Небауэра 240, 241
— Дэвиссона и Джермера 70, 71
— Комптона 47, 49
— Корка, Ламбертсона, Пиччиони и Вентцеля 332
— Ледермана и Шварца 351
— Любимова, Новикова, Нозика и др. 347, 348
— Милликена 40
— Паунда и Ребки 199
Опыт Резерфорда 55
— Рейнеса и Коуэна 349
— Тартаковского 71
— Томсона 71
— Франка и Герца 62, 63
— Чемберлена, Сегре, Виганда и Ипсилантиса 332
— Штерна 72
— Штерна и Герлаха 92
— Эйнштейна и де Гааза 130
Опыты Столетова 37
Очарование 360

Период полураспада 293
Периодическая таблица Менделеева 147, 279
Пи-мезон 289, 320, 326, 327, 334, 335, 359
Пион 289, 320, 334
Плотность вероятности 85, 109
Плутоний 280, 309–311, 313, 314
$p-n$-переход 269, 273, 274
Поверхность Ферми 219, 227
Поглощательная способность 12
Позитрон 289, 299, 315, 326, 328, 330, 334
Позитроний 360
Полупроводник 242, 245
— $n$-типа 248
— примесный 242
— $p$-типа 248
— собственный 229, 242, 245–247
Порядковый номер элемента 279
Постоянная Планка 30, 40, 66, 75, 76, 92, 194
— распада 292
— Ридберга 52, 68, 113, 154
— Стефана–Больцмана 18, 34
— тонкой структуры 125, 126
Постулаты Бора 61
Потенциал выхода 253, 260
Потенциальный барьер 95
Правила отбора 102, 172
— Хунда 152
Правило отбора для азимутального квантового числа 106
— — — вращательного квантового числа 160
— — — $j$ 124
— — — колебательного квантового числа 102, 158
— — — $l$ 106, 112
— — — $m_J$ 136
— — — $m_L$ 140
— — — $m_S$ 140

Принцип запрета 144
— исключения 144
— неопределенности 75, 78, 100
— неразличимости одинаковых частиц 143
— Паули 144–147 , 150, 151, 191
— суперпозиции состояний 94
Проводимость дырочная 248
— примесная 247, 250
— собственная 244, 150
Промежуточные векторные бозоны 362, 363
Протий 279
Протон 72, 121, 277, 290–292, 335, 337, 357, 363
Пси-функция 80, 84, 85, 343, 344
Пси-частицы 360

Работа выхода 39, 253, 260
Равновесная плотность энергии излучения 15–17, 45
Радиоактивность 292
Радиоактивные ряды 294
Радиоспектроскоп 142
Радиоуглерод 306
Распределение Бозе–Эйнштейна 200, 207, 210
— Больцмана 141, 207
— Ферми–Дирака 200, 205, 207, 219, 244
Резонансы 321
Рентгеновская флуоресценция 42
Ридберговская поправка 113
Рождение пар 327, 330–332
Ротоны 215

Сверхпроводимость 236–238
Сверхтекучесть 212
Связь Рёссель–Саундерса 127
Серое тело 12
Серии линий 51, 53
Символ состояний атома 128
— — электрона 105
— термов 122, 123, 128
— ядер 279
Синтез ядер 282, 284, 314
Скорость групповая 230
— дрейфовая 233, 234
Смещение лоренцево 136
— нормальное 136
Соотношение неопределенностей 75–79, 220, 287
Состояния вырожденные 104
— метастабильные 114, 172
Спектр атомный 51
— —, сверхтонкая структура 281
— —, тонкая структура 119, 125
— возбуждений 215
— дискретный 86, 88
— линейчатый 51
— молекулярный 160
— непрерывный 86
— полосатый 161
— рентгеновский 35, 37, 152
— сплошной 86
Спектральные серии водородного атома 53, 106
— — щелочных металлов 110–114
Спин 120, 121, 327
— изотопический 336–339, 352–354
Спин-орбитальное взаимодействие 122, 336
Спиральность 347
Спонтанное деление тяжелых ядер 300
Средний электрический заряд 342
Странность 339–342, 355
Схема энергетических уровней водорода 66, 67, 106, 107
— — — натрия 110, 111, 123
— — — цезия 124
Сцинтилляция 56, 60, 322

Температура вырождения 214
— Дебая 186, 189, 197
— Ферми 222–224
Теория БКШ 238
— Боголюбова 238
— Бора 66–68, 104
— Дебая 186, 189
— Дирака 330
— Ландау 214
— относительности 120
— Эйнштейна 182, 183
Теплоемкость кристаллической решетки 182, 212
— электронов в металле 224
Терм 53, 64, 113
Термопара 266, 267
Термоэлектронная эмиссия 254–256
Термоядерная реакция 284, 314–316
Транзистор 269, 274
Трансурановые элементы 280
Тритий 279, 315

Туннельный эффект 100, 297
Тяжелая вода 312
Тяжелый водород 279, 286, 312
— тау-лептон 320, 335

Ультрафиолетовая катастрофа 30
Уравнение Дирака 327, 328, 331
— Шрёдингера 80–82, 86, 87, 156, 157, 218, 225, 226, 327
Уровень Ферми 219, 220, 223, 236, 240, 245, 249, 253, 259, 260, 263, 271
Уровни энергии 64, 88, 224
Условие нормировки 84, 89

Фазовое $\mu$-пространство 200
Фактор Ланде 130
Ферми, единица длины 280
Ферми-газ 201
Фермионы 144, 200, 201, 212, 219
Фонон 192, 210, 215, 239, 264
Формула Бальмера 52, 53, 68
— Планка 30, 32, 34, 168, 169, 210
— Резерфорда 55, 56, 60
— Ридберга 113
— Ричардсона–Дэшмана 256
— Рэлея–Джинса 28, 29, 33, 169
— Эйнштейна 40, 41
Фотон 42–44, 64, 69, 72, 107, 108, 121, 166, 192, 199, 208, 210, 287, 297, 319, 333, 347, 359
— виртуальный 287
Фотосопротивление 275
Фотоэффект 37, 39, 69
— вентильный 276
— внешний 41, 275
— внутренний 41, 275
—, красная граница 41
— многофотонный 41, 178
Функции Блоха 226

Химический потенциал 205, 208

Цвет кварка 357–359

Чармоний 360
Частицы абсолютно нейтральные 333
— виртуальные 287, 288
— очарованные 360
— странные 326, 339, 355, 356
— элементарные 72, 318, 319, 321, 356
Четность 343–346
— комбинированная 346

Шарм 360
Ширина спектральной линии 115, 117–119, 195
Ширина энергетического уровня 115

Электрон 72, 73, 110, 144–147, 148, 320, 333–336
Электронная конфигурация 147, 148, 157
— оболочка 145
— подоболочка 145
Электронный захват 292, 297, 300
— парамагнитный резонанс 141
— слой 145
Электрон-позитронная пара 327, 330
Электроны проводимости 218
— свободные 218, 219, 223
— эквивалентные 150
Энергетическая светимость 11
— — абсолютно черного тела 15–17, 33
Энергия активации 283
— вращательная 159, 160
— колебательная 159, 160, 182
— молекулы 158, 160
— отдачи 116, 117, 193–195, 197, 198
— реакции 302
— связи нуклонов в ядре 281
— Ферми 220
— электронная 158
Эта-мезон 320, 334, 335, 354
Эффект Джозефсона 241
— Зеебека 262
— Зеемана 120, 134–138
— Комптона 47, 49, 69
— Мейсснера 237
— Мёссбауэра 193, 196–198
— Пашена–Бака 140
— Пельтье 267
— Рамана 165
— Томсона 268
— Холла 249
— Штарка 134
Эффективная масса электрона 231, 232, 234, 236, 244
Эффективное сечение 303, 304

Ядерная модель атома 56, 60
— реакция 301, 310, 311
Ядерное время 302
Ядерный реактор 284, 312, 313
— синтез 314
Ядро атома 280
— составное 302

*Игорь Владимирович САВЕЛЬЕВ*

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Том 5

**Квантовая оптика.
Атомная физика.
Физика твердого тела.
Физика атомного ядра
и элементарных частиц**

*Учебное пособие*

Издание пятое, исправленное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 05.05.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 20,16. Тираж 1500 экз.

Заказ № **82.29**.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Северо-Западный Печатный двор».
188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, ул. Железнодорожная, д. 45Б.
Тел.: (813) 714-01-81, (813) 714-01-82; факс: (813) 713-69-77.
E-mail: szpd@szpd-print.ru